Matemáticas III

Farith J. Briceño N. - 2015

Material en revisión

Indice

Matemática III - Guía 1

Matrices. Definiciones básicas.

Objetivos a cubrir

Código : MAT-3.01

- Matrices. Operaciones entre matrices. Propiedades de las matrices.
- Matriz traspuesta, simétrica, antisimétrica, idempotente.
- Operaciones elementales sobre las filas de una matriz.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 1 *: Sean* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} \alpha^2 - 2 & \beta & 3 \\ 5 - \beta & 0 & -1 \end{pmatrix}$. *Hallar los valores de* α *y* β *para que* $A = B$.

Solución : Estas matrices no pueden ser iguales, ya que, $a_{23} \neq b_{23}$. ★

Ejemplo 2 *: Sean* $A = \begin{pmatrix} a^2 & b^2 \\ b^2 + 2 & a^4 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} -1 & 2b - 1 \\ 3b & 1 \end{pmatrix}$. *Hallar los valores de* a *y* b *para que* $A = B$.

Solución : Observemos, en primer lugar, que ambas matrices son del mismo tamaño, 2×2. Veamos, ahora, cuales son los valores de a y b, para que sean iguales componentes a componentes, así, se deben cumplir las siguientes igualdades

$$a_{11} = b_{11} \implies a^2 = -1 \implies \boxed{a = \pm i}$$

$$a_{12} = b_{12} \implies b^2 = 2b - 1 \implies b^2 - 2b + 1 = 0 \implies (b-1)^2 = 0 \implies \boxed{b = 1}$$

$$a_{21} = b_{21} \implies b^2 + 2 = 3b \implies b^2 - 3b + 2 = 0 \implies (b-1)(b-2) = 0 \implies \boxed{b = 1} \text{ y } b = 2$$

$$a_{22} = b_{22} \implies a^4 = 1 \implies \boxed{a = \pm i}$$

Luego, los valores de a y b para que $A = B$ son $\boxed{a = \pm i}$ y $\boxed{b = 1.}$ ★

Ejemplo 3 *: Hallar los valores de las constantes* α *y* β *para que*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha\beta & 4\beta - 1 & 4\alpha^3 - 6\alpha^2 \end{pmatrix} \qquad y \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 5\beta^2 & \alpha^4 - 4\alpha + 5 \end{pmatrix}$$

sean iguales.

Solución : Observemos que las dos matrices tienen el mismo tamaño, 1×3. Además para que sean iguales se debe cumplir

1^{ra} entrada $\qquad \alpha\beta = 1$

2^{da} entrada $\qquad 4\beta - 1 = 5\beta^2 \implies 5\beta^2 - 4\beta + 1 = 0 \implies \boxed{\beta = \dfrac{2 \pm i}{5}}$

3^{ra} entrada $\qquad 4\alpha^3 - 6\alpha^2 = \alpha^4 - 4\alpha + 5 \implies \alpha^4 - 4\alpha^3 + 6\alpha^2 - 4\alpha + 5 = 0$

De la ecuación de la primera entrada tenemos que, si $\beta = \dfrac{2+i}{5}$, entonces

$$\alpha\beta = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha\left(\frac{2+i}{5}\right) = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = 2 - i,$$

mientras que, para $\beta = \dfrac{2-i}{5}$, se tiene que

$$\alpha\beta = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha\left(\frac{2-i}{5}\right) = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = 2 + i,$$

por último, sustituimos estos valores de α en la ecuación de la tercera entrada para demostrar que se cumple la igualdad,

- Para $\alpha = 2 - i$, se tiene

$$\begin{aligned} \alpha^4 - 4\alpha^3 + 6\alpha^2 - 4\alpha + 5 &= (2-i)^4 - 4(2-i)^3 + 6(2-i)^2 - 4(2-i) + 5 \\ &= (2-i)^2\Big((2-i)^2 - 4(2-i) + 6\Big) - 4(2-i) + 5 \\ &= (2-i)^2\left(4 - 4i + i^2 - 8 + 4i + 6\right) - 8 + 4i + 5 \\ &= (2-i)^2(1) - 3 + 4i = 4 - 4i + i^2 - 3 + 4i = 0, \end{aligned}$$

  es decir, se cumple la igualdad.

- Para $\alpha = 2 + i$, se tiene

$$\begin{aligned} \alpha^4 - 4\alpha^3 + 6\alpha^2 - 4\alpha + 5 &= (2+i)^4 - 4(2+i)^3 + 6(2+i)^2 - 4(2+i) + 5 \\ &= (2+i)^2\Big((2+i)^2 - 4(2+i) + 6\Big) - 4(2+i) + 5 \\ &= (2+i)^2\left(4 + 4i + i^2 - 8 - 4i + 6\right) - 8 - 4i + 5 \\ &= (2+i)^2(1) - 3 - 4i = 4 + 4i + i^2 - 3 - 4i = 0, \end{aligned}$$

  es decir, se cumple la igualdad.

Luego, los valores buscados son

$$\boxed{\beta = \frac{2+i}{5}, \qquad \alpha = 2 - i} \qquad \text{y} \qquad \boxed{\beta = \frac{2-i}{5}, \qquad \alpha = 2 + i.}$$

★

Ejemplo 4 *: Sean* $C = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ *y* $k = -3$, *hallar* kC.

Solución : Tenemos que

$$kC = -3\begin{pmatrix} 7 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3)(7) & (-3)(-1) & (-3)(4) \\ (-3)(3) & (-3)(5) & (-3)(0) \\ (-3)(-2) & (-3)(-1) & (-3)(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 & 3 & -12 \\ -9 & -15 & 0 \\ 6 & 3 & -12 \end{pmatrix}$$

así, la matriz $-3C$ es una nueva matriz del mismo tamaño de la matriz C, denotamos esta nueva matriz B

$$B = \begin{pmatrix} -21 & 3 & -12 \\ -9 & -15 & 0 \\ 6 & 3 & -12 \end{pmatrix}.$$

★

Ejemplo 5 *: Sean* $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. *Hallar* $A+B$*, en caso de ser posible.*

Solución : Puesto que ambas matrices tienen el mismo tamaño, 2×2, la operación suma se puede realizar, así, tenemos que

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+(2) & 1+(-3) \\ 2+(-1) & -5+(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix},$$

luego, la matriz suma de las matrices A y B, la cual denotamos por C, viene dada por

$$C = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

★

Ejemplo 6 *: Hallar* $A+B$*, en caso de ser posible, donde*

$$A = \begin{pmatrix} 3i & 1-3i & -5 \\ 4-i & -3 & \frac{2}{3}-3i \end{pmatrix} \qquad y \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3-4i \\ -i & \frac{7}{2} & 2+\frac{2}{3}i \end{pmatrix}.$$

Solución : Puesto que ambas matrices tienen el mismo tamaño, 2×3, la operación suma se puede realizar, así, tenemos que

$$A + B = \begin{pmatrix} 3i & 1-3i & -5 \\ 4-i & -3 & \frac{2}{3}-3i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3-4i \\ -i & \frac{7}{2} & 2+\frac{2}{3}i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3i+(1) & 1-3i+(0) & -5+(3-4i) \\ 4-i+(-i) & -3+\left(\frac{7}{2}\right) & \frac{2}{3}-3i+\left(2+\frac{2}{3}i\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3i & 1-3i & -2-4i \\ 4-2i & \frac{1}{2} & \frac{8}{3}-\frac{7}{3}i \end{pmatrix},$$

luego, la matriz suma de las matrices A y B, la cual denotamos por C, viene dada por

$$C = \begin{pmatrix} 1+3i & 1-3i & -2-4i \\ 4-2i & \frac{1}{2} & \frac{8}{3}-\frac{7}{3}i \end{pmatrix}.$$

★

Ejemplo 7 *: Sean* $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 2 \\ -3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. *Hallar* CA*, en caso de ser posible.*

Solución : En primer lugar, observemos que el producto $C_{3\times 2}A_{2\times 2}$ se puede realizar, ya que, el número de columnas de la matriz C coincide con el número de filas de la matriz A, además, se tiene que la matriz resultante, CA, es de tamaño 3×2

$$CA = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 2 \\ -3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{5}\right)(-1) + (2)(-2) & \left(\frac{1}{5}\right)(2) + (2)(1) \\ (-3)(-1) + (0)(-2) & (-3)(2) + (0)(1) \\ (1)(-1) + (1)(-2) & (1)(2) + (1)(1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} - 4 & \frac{2}{5} + 2 \\ 3 + 0 & -6 + 0 \\ -1 - 2 & 2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{21}{5} & \frac{12}{5} \\ 3 & -6 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad CA = \begin{pmatrix} -\frac{21}{5} & \frac{12}{5} \\ 3 & -6 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

★

Ejemplo 8 *: Sean* $A = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. *Hallar* AB, *en caso de ser posible.*

Solución : En primer lugar, observemos que el producto $A_{3\times 1}B_{1\times 3}$ se puede realizar, ya que, el número de columnas de la matriz A coincide con el número de filas de la matriz B, además, concluimos que la matriz resultante, AB, es de tamaño 3×3

$$AB = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3)(-1) & (3)(4) & (3)(2) \\ (-3)(-1) & (-3)(4) & (-3)(2) \\ (2)(-1) & (2)(4) & (2)(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 12 & 6 \\ 3 & -12 & -6 \\ -2 & 8 & 4 \end{pmatrix},$$

así,

$$AB = \begin{pmatrix} -3 & 12 & 6 \\ 3 & -12 & -6 \\ -2 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

★

Ejemplo 9 *: Sean* $C = \begin{pmatrix} \pi & 4 \\ 1 & \sqrt{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ *y* $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$. *Hallar* CD, *en caso de ser posible.*

Solución : En primer lugar, observemos que el producto $C_{3\times 2}D_{1\times 3}$ **NO** se puede realizar, ya que, el número de columnas de la matriz C no es igual al número de filas de la matriz D, por lo tanto, el producto CD no tiene sentido. ★

Ejemplo 10 *: Responda* ***VERDADERA*** *o* ***FALSA*** *la siguiente proposición:*

"El producto de matrices es conmutativo".

Solución : Consideremos las matrices del ejemplo 9

$$C = \begin{pmatrix} \pi & 4 \\ 1 & \sqrt{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \end{pmatrix},$$

observemos que el producto $C_{3\times 2}D_{1\times 3}$ **NO** se puede realizar, pero el producto $D_{1\times 3}C_{3\times 2}$ **SI** se puede realizar, ya que, el número de columnas de la matriz D es igual al número de filas de la matriz C.

Gracias a este **contraejemplo** podemos concluir que la proposición es **FALSA**. ★

Ejemplo 11 *: Sean* $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 & -2 \end{pmatrix}$. *Hallar* B^2, *en caso de ser posible.*

Solución : Tenemos que $B^2 = BB$, como la matriz B no es una matriz cuadrada, concluimos que B^2 **NO** tiene sentido. ★

Ejemplo 12 *: Sean*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} i & i-2 \\ 1 & i-1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 2 \\ -3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Diga cuales de las siguientes operaciones tienen sentido y efectuelas

1. $A + B$ 2. $D - 2E$ 3. $5C$ 4. $CA - 2D$ 5. $B^2 + iA$ 6. $C^2 + D$

Solución : 1. Puesto que ambas matrices tienen el mismo tamaño, 2×2, se puede realizar la operación, así, tenemos que

$$A + B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & i-2 \\ 1 & i-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+i & i \\ -1 & i \end{pmatrix}.$$

2. La operación $D - 2E$ no tiene sentido, ya que las matrices no tienen el mismo tamaño.

3. Tenemos que

$$5C = 5 \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 2 \\ -3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ -15 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. Observemos que el producto $C_{3\times 2} A_{2\times 2}$ se puede realizar, ya que, el número de columnas de la matriz C coincide con el número de filas de la matriz A, además, concluimos que la matriz resultante, CA, es de tamaño 3×2, el cual es el tamaño de la matriz resultante $2D$, así, la operación

$$(CA)_{3\times 2} - (2D)_{3\times 2}$$

se puede efectuar.

Realizamos la operación

$$CA - 2D = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 2 \\ -3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{5}\right)(-1) + (2)(-2) & \left(\frac{1}{5}\right)(2) + (2)(1) \\ (-3)(-1) + (0)(-2) & (-3)(2) + (0)(1) \\ (1)(-1) + (1)(-2) & (1)(2) + (1)(1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 8 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{21}{5} & \frac{12}{5} \\ 3 & -6 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 8 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{21}{5} - 1 & \frac{12}{5} + 2 \\ 3+4 & -6-8 \\ -3-6 & 3-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{26}{5} & \frac{22}{5} \\ 7 & -14 \\ -9 & -7 \end{pmatrix}.$$

5. Tenemos que el producto $B^2 = B_{2\times 2}B_{2\times 2}$ se puede realizar, ya que, la matriz B es una matriz cuadrada de orden 2, por lo que la matriz resultante, B^2, es de tamaño 2×2, el cual es el tamaño de la matriz resultante iA, así, la operación

$$\left(B^2\right)_{2\times 2} + (iA)_{2\times 2}$$

se puede efectuar.

Realizamos la operación

$$B^2 + iA = BB + iA = \begin{pmatrix} i & i-2 \\ 1 & i-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & i-2 \\ 1 & i-1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (i)(i) + (i-2)(1) & (i)(i-2) + (i-2)(i-1) \\ (1)(i) + (i-1)(1) & (1)(i-2) + (i-1)(i-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i & 2i \\ -2i & i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} i^2 + i - 2 & i^2 - 2i + i^2 - 3i + 2 \\ i + i - 1 & i - 2 + i^2 - 2i + 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i & 2i \\ -2i & i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3+i & -5i \\ -1+2i & -2-i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i & 2i \\ -2i & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+i-i & -5i+2i \\ -1+2i-2i & -2-i+i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -3i \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

6. La operación $C^2 + D$ **NO** tiene sentido, puesto que, la matriz C no es una matriz cuadrada, por lo tanto, C^2 **NO** se puede realizar. ★

Ejemplo 13 *: Considere la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$$

Demuestre que la $n-$ésima potencia de esta matriz es

$$A^n = 2^n \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Demostración : Usamos inducción matemática para demostrar la igualdad

Paso I : Verificamos la igualdad para $n = 1$

$$A^1 = A = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(-1) & 2(4) & 2(3) \\ 2(-2) & 2(5) & 2(3) \\ 2(2) & 2(-4) & 2(-2) \end{pmatrix} = 2^1 \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Paso II : *Hipótesis inductiva* : Supongamos que la igualdad se cumple para $n = h$.

$$A^h = 2^h \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Paso III : *Tesis inductiva* : Demostremos la igualdad para el caso $n = h+1$, es decir, debemos demostrar que

$$A^{h+1} = 2^{h+1} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Como $A^{h+1} = A^h A$ y por hipótesis inductiva se tiene que

$$A^h = 2^h \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix},$$

entonces,

$$A^{h+1} = A^h A = 2^h \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= 2^h \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} 2 \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} = 2^{h+1} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix},$$

pero,

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} = A^2,$$

así,

$$A^2 = \begin{pmatrix} (-1)(-1) + (4)(-2) + (3)(2) & (-1)(4) + (4)(5) + (3)(-4) & (-1)(3) + (4)(3) + (3)(-2) \\ (-2)(-1) + (5)(-2) + (3)(2) & (-2)(4) + (5)(5) + (3)(-4) & (-2)(3) + (5)(3) + (3)(-2) \\ (2)(-1) + (-4)(-2) + (-2)(2) & (2)(4) + (-4)(5) + (-2)(-4) & (2)(3) + (-4)(3) + (-2)(-2) \end{pmatrix},$$

efectuando obtenemos que

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix},$$

con lo que

$$A^{h+1} = 2^{h+1} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Al cumplirse la tesis inductiva, concluimos que

$$A^n = 2^n \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

★

Ejemplo 14 *: Considere la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Demuestre que la $n-$*ésima potencia de esta matriz es*

$$A^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Demostración : Usamos inducción matemática para demostrar la igualdad

Paso I : Verificamos la igualdad para $n = 1$

$$A^1 = A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)^1 & 0 & 0 \\ 0 & (3)^1 & 0 \\ 0 & 0 & (2)^1 \end{pmatrix}.$$

Paso II : *Hipótesis inductiva* : Supongamos que la igualdad se cumple para $n = h$.

$$A^h = \begin{pmatrix} (-2)^h & 0 & 0 \\ 0 & 3^h & 0 \\ 0 & 0 & 2^h \end{pmatrix}$$

Paso III : *Tesis inductiva* : Demostremos la igualdad para el caso $n = h + 1$, es decir, debemos demostrar que

$$A^{h+1} = \begin{pmatrix} (-2)^{h+1} & 0 & 0 \\ 0 & 3^{h+1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{h+1} \end{pmatrix}.$$

Como $A^{h+1} = A^h A$ y por hipótesis inductiva se tiene que

$$A^{h+1} = A^h A = \begin{pmatrix} (-2)^h & 0 & 0 \\ 0 & 3^h & 0 \\ 0 & 0 & 2^h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-2)^h(-2) + (0)(0) + (0)(0) & (-2)^h(0) + (0)(3) + (0)(0) & (-2)^h(0) + (0)(0) + (0)(2) \\ (0)(-2) + \left(3^h\right)(0) + (0)(0) & (0)(0) + \left(3^h\right)(3) + (0)(0) & (0)(0) + \left(3^h\right)(0) + (0)(2) \\ (0)(-2) + (0)(0) + \left(2^h\right)(0) & (0)(0) + (0)(3) + (0)\left(2^h\right) & (0)(0) + (0)(0) + \left(2^h\right)(2) \end{pmatrix}$$

$$A^{h+1} = A^h A = \begin{pmatrix} (-2)^{h+1} & 0 & 0 \\ 0 & 3^{h+1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{h+1} \end{pmatrix}$$

Al cumplirse la tesis inductiva, concluimos que

$$A^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

★

Ejemplo 15 *: Determinar si las siguientes proposiciones son **VERDADERA** ó **FALSA**.*

1. Si $AB = 0$ entonces $A = 0$ y/o $B = 0$.

2. Si $AB = AC$ entonces $B = C$.

Solución :

1. Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

son diferentes de cero, pero,

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1)(0) & (0)(0) \\ (0)(1) & (0)(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

es decir, $AB = 0$. Por la tanto, la proposición es **FALSA**.

2. Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

observemos que,

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1)(0) & (0)(0) \\ (0)(1) & (0)(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

mientras que,

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1)(0) & (0)(0) \\ (0)(3) & (0)(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

se tiene que $AB = AC = 0$, pero, $B \neq C$. Por la tanto, la proposición es **FALSA**. ★

Ejemplo 16 *: Resuelva la ecuación matricial* $2X + 4A = 3B + 2A$, *donde*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad y \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución : Tenemos que

$$2X + 4A = 3B + 2A \quad \Longrightarrow \quad 2X = 3B + 2A - 4A \quad \Longrightarrow \quad 2X = 3B - 2A \quad \Longrightarrow \quad X = \frac{3}{2}B - A$$

Así,

$$X = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{3}{2} & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\dfrac{3}{2} - 1 & 0 - 1 \\ 0 + 0 & 3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{5}{2} & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación matricial es

$$X = \begin{pmatrix} -\dfrac{5}{2} & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

★

Ejemplo 17 : *Resuelva el sistema matricial*

$$\begin{cases} 2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ \\ X - \ \ Y = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Solución : Multiplicamos por -2 a la segunda ecuación y se la sumamos a la primera ecuación

$$\begin{array}{r} \left\{ \begin{array}{l} 2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ \\ X - \ \ Y = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right. \\ -2 \qquad\qquad \\ \hline \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{array}{r} \left\{ \begin{array}{l} 2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ \\ -2X + 2Y = -2\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right. \\ \hline -Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{array}$$

entonces

$$-Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad Y = -\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de aquí,

$$Y = -\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 + 12 & -5 + 4 \\ -4 + 0 & -2 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

así,

$$Y = \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

de la segunda ecuación se tiene

$$X - Y = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad X = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + Y,$$

por lo tanto,

$$X = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + Y = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+11 & 2+(-1) \\ 0+(-4) & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

así,

$$X = \begin{pmatrix} 17 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego, la solución del sistema matricial viene dada por

$$X = \begin{pmatrix} 17 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad Y = \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

★

Ejemplo 18 *: Identificar cuales de las siguientes matrices se encuentra en la forma escalonada o en la forma escalonada reducida por filas. Justifique su respuesta.*

$$a. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad b. \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c. \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad d. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución : Es conocido que una matriz se encuentra en la **forma escalonada reducida por filas** si se cumplen las siguientes condiciones

1. Todas las filas (si las hay) cuyos elementos son todos ceros aparecen en la parte inferior de la matriz.
2. El primer número diferente de cero (comenzando por la izquierda) en cualquier fila cuyos elementos no todos son cero es 1.
3. Si dos filas sucesivas tienen elementos distintos de cero, entonces el primer 1 en la fila de abajo está más hacia la derecha que el prim 1 en la fila de arriba.
4. Cualquier columna que contiene el primer 1 en una fila tiene ceros en el resto de sus elementos.

Por otra parte, una matriz está en la **forma escalonada por filas** si se cumplen (1), (2) y (3).

a. Observemos que la matriz A cumple con las condiciones (1) - (4), por lo tanto, es una matriz que se encuentra en su forma escalonada reducida, note que toda matriz que se encuentra en su forma escalonada reducida, también se encuentra en su forma escalonada.

b. Observemos que la matriz B **NO** cumple con la condición (1) en la primera fila, por lo tanto, no se encuentra en su forma escalonada.

c. Observemos que la matriz C cumple con las condiciones (1) - (4), por lo tanto, es una matriz que se encuentra en su forma escalonada.

d. Observemos que la matriz A **NO** cumple con las condiciones (1) y (3) en la tercera fila, por lo tanto, no se encuentra en su forma escalonada. ★

Ejemplo 19 : *Considere la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

Encuentre la matriz equivalente a A *dada por las siguientes operaciones elementales sobre las filas*

$$\frac{1}{3}F_1 \longrightarrow F_1, \qquad 2F_2 + F_3 \longrightarrow F_3, \qquad F_1 + F_4 \longrightarrow F_4.$$

Solución : Aplicamos las operaciones elementales sobre las filas de la matriz A

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & -1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}F_1 \to F_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2F_2 + F_3 \to F_3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 5 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1 + F_4 \to F_4} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \frac{8}{3} & \frac{13}{3} & -1 & -\frac{11}{3} \end{pmatrix},$$

Luego, la matriz equivalente a A según las operaciones elementales sobre las filas dadas es

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \frac{8}{3} & \frac{13}{3} & -1 & -\frac{11}{3} \end{pmatrix}.$$

★

Ejemplo 20 : *Hallar la matriz equivalente en su forma escalonada de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & -2 & -5 & 0 \\ -6 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solución : Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz dada para transformar dicha matriz en la versión de su forma escalonada (método de eliminación gaussiana)

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & -2 & -5 & 0 \\ -6 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{4}F_1 \to F_1} \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{1}{2} & -1 & -\dfrac{1}{4} \\ 6 & -2 & -5 & 0 \\ -6 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-6F_1+F_2 \to F_2} \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{1}{2} & -1 & -\dfrac{1}{4} \\ 0 & 1 & 1 & \dfrac{3}{2} \\ -6 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{6F_1+F_3 \to F_3} \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{1}{2} & -1 & -\dfrac{1}{4} \\ 0 & 1 & 1 & \dfrac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 & \dfrac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-F_2+F_3 \to F_3} \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{1}{2} & -1 & -\dfrac{1}{4} \\ 0 & 1 & 1 & \dfrac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, la matriz equivalente en su forma escalonada de la matriz dada es

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{1}{2} & -1 & -\dfrac{1}{4} \\ 0 & 1 & 1 & \dfrac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

★

Ejemplo 21 *: Hallar la matriz equivalente en su forma escalonada reducida de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución : Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz para transformar dicha matriz en su forma escalonada reducida

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \longleftrightarrow F_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-2F_1 + F_4 \to F_4]{-3F_1 + F_2 \to F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_2 \to F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[]{\substack{-F_2+F_3\to F_3 \\ -2F_2+F_4\to F_4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}F_3\to F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow[7F_3+F_4\to F_4]{\substack{-F_3+F_1\to F_1 \\ -2F_3+F_2\to F_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{10}F_4\to F_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-F_4+F_1\to F_1 \\ -4F_4+F_2\to F_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego, la matriz equivalente en su forma escalonada reducida de la matriz dada es

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

★

Ejemplo 22 *: Considere la matriz A dada por*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1. *Encuentre la matriz en su forma escalonada reducida de la matriz aumentada $(A \mid I)$.*
2. *Considere la matriz* $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \end{pmatrix}$, *hallar, en caso de ser posible, los productos de matrices*

   a. AB, *b.* BA, *c.* BAB.

Solución : 1. Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada para transformar dicha matriz en su forma escalonada reducida

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-3F_1+F_2\to F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-5F_2 + F_3 \to F_3]{F_2 + F_1 \to F_1} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -3 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{8}F_3 \to F_3} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{2F_3 + F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \end{array}\right).$$

Luego, la matriz equivalente en su forma escalonada reducida de la matriz $(A \mid I)$ es

$$C = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \end{array}\right).$$

2.a. Puesto que las matrices A y B son cuadradas de orden 3, entonces el producto AB se puede realizar

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1)(1) + (-1)\left(-\frac{3}{4}\right) + (2)\left(-\frac{3}{8}\right) & (1)(0) + (-1)\left(\frac{1}{4}\right) + (2)\left(\frac{1}{8}\right) & (1)(1) + (-1)\left(-\frac{1}{4}\right) + (2)\left(-\frac{5}{8}\right) \\ (3)(1) + (2)\left(-\frac{3}{4}\right) + (4)\left(-\frac{3}{8}\right) & (3)(0) + (2)\left(\frac{1}{4}\right) + (4)\left(\frac{1}{8}\right) & (3)(1) + (2)\left(-\frac{1}{4}\right) + (4)\left(-\frac{5}{8}\right) \\ (0)(1) + (1)\left(-\frac{3}{4}\right) + (-2)\left(-\frac{3}{8}\right) & (0)(0) + (1)\left(\frac{1}{4}\right) + (-2)\left(\frac{1}{8}\right) & (0)(1) + (1)\left(-\frac{1}{4}\right) + (-2)\left(-\frac{5}{8}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} & 0 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} & 1 + \frac{1}{4} - \frac{5}{4} \\ 3 - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} & 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & 3 - \frac{1}{2} - \frac{5}{2} \\ 0 - \frac{3}{4} + \frac{3}{4} & 0 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} & 0 - \frac{1}{4} + \frac{5}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego.

$$AB=\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&2&4\\0&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\-\dfrac{3}{4}&\dfrac{1}{4}&-\dfrac{1}{4}\\-\dfrac{3}{8}&\dfrac{1}{8}&-\dfrac{5}{8}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3.$$

2.b. Puesto que las matrices A y B son cuadradas de orden 3, entonces el producto BA se puede realizar

$$BA=\begin{pmatrix}1&0&1\\-\dfrac{3}{4}&\dfrac{1}{4}&-\dfrac{1}{4}\\-\dfrac{3}{8}&\dfrac{1}{8}&-\dfrac{5}{8}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&2&4\\0&1&-2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(1)(1)+(0)(3)+(1)(0) & (1)(-1)+(0)(2)+(1)(1) & (1)(2)+(0)(4)+(1)(-2)\\ \left(-\frac{3}{4}\right)(1)+\left(\frac{1}{4}\right)(3)+\left(-\frac{1}{4}\right)(0) & \left(-\frac{3}{4}\right)(-1)+\left(\frac{1}{4}\right)(2)+\left(-\frac{1}{4}\right)(1) & \left(-\frac{3}{4}\right)(2)+\left(\frac{1}{4}\right)(4)+\left(-\frac{1}{4}\right)(-2)\\ \left(-\frac{3}{8}\right)(1)+\left(\frac{1}{8}\right)(3)+\left(-\frac{5}{8}\right)(0) & \left(-\frac{3}{8}\right)(-1)+\left(\frac{1}{8}\right)(2)+\left(-\frac{5}{8}\right)(1) & \left(-\frac{3}{8}\right)(2)+\left(\frac{1}{8}\right)(4)+\left(-\frac{5}{8}\right)(-2)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1+0+0 & -1+0+1 & 2+0-2\\ -\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{4}+0 & \dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4} & -\dfrac{3}{2}+1+\dfrac{1}{2}\\ -\dfrac{3}{8}+\dfrac{3}{8}+0 & \dfrac{3}{8}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{5}{8} & -\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Luego.

$$BA=\begin{pmatrix}1&0&1\\-\dfrac{3}{4}&\dfrac{1}{4}&-\dfrac{1}{4}\\-\dfrac{3}{8}&\dfrac{1}{8}&-\dfrac{5}{8}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&2&4\\0&1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3$$

2.c. Tenemos, por la ley asociativa del producto de matrices y por (2.b.), que

$$BAB=(BA)B=I_3B=B.$$

★

Ejercicios

1. Sean $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&0&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}\alpha^2-2&\beta&3\\5-\beta&0&-1\end{pmatrix}$. Hallar los valores de α y β para que $A=B$.
2. Sean $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&-1&0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}\alpha^2+2&\beta&4\\\beta+1&-1&0\end{pmatrix}$. Hallar los valores de α y β para que $A=B$.
3. Sean $A=\begin{pmatrix}a^2&b^2\\b^2+2&a^4\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-1&2b-1\\3b&1\end{pmatrix}$. Hallar los valores de a y b para que $A=B$.

4. Sean $A = \begin{pmatrix} \alpha^3 & 1 \\ \gamma^2 & \alpha+\beta \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -2 & -2+\sqrt{3}i \\ \beta^2 & -1 \end{pmatrix}$. Hallar los valores de α, β y γ para que $A = B$.

5. Hallar los valores de las constantes α y β para que

$$A = \begin{pmatrix} \alpha\beta & 4\beta-1 & 4\alpha^3-6\alpha^2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 5\beta^2 & \alpha^4-4\alpha+5 \end{pmatrix}$$

sean iguales.

6. Sean $C = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ y $k = -3$, hallar kC.

7. Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Hallar $A+B$, si es posible.

8. Hallar $A+B$, si es posible, donde

$$A = \begin{pmatrix} 3i & 1-3i & -5 \\ 4-i & -3 & \dfrac{2}{3}-3i \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3-4i \\ -i & \dfrac{7}{2} & 2+\dfrac{2}{3}i \end{pmatrix}.$$

9. Sean $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 2 \\ -3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar CA, si es posible.

10. Sean $A = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. Hallar AB, si es posible.

11. Sean $C = \begin{pmatrix} \pi & 4 \\ 1 & \sqrt{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$. Hallar CD, si es posible.

12. Responda **VERDADERO** o **FALSO** la siguiente proposición:

"El producto de matrices es conmutativo".

13. Sean $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 & -2 \end{pmatrix}$. Hallar B^2, si es posible.

14. Sean

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} i & i-2 \\ 1 & i-1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 2 \\ -3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Diga cuales de las siguientes operaciones tienen sentido y efectuar la misma.

1. $A+B$ 2. $D-2E$ 3. $5C$ 4. $CA-2D$ 5. B^2+iA 6. C^2+D

15. Sean

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad ; \quad B=\begin{pmatrix} i & 2-i \\ -3i & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad C=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad D=\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ -5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Diga cuales de las siguientes operaciones tienen sentido y efectuar la misma.

1. $A+B$	2. $D+2E$	3. $4E$	4. $3D-CA$	5. B^3-iA	6. E^2-C
7. $2iBE$	8. $BE+D$	9. $3DE$	10. A^2+DB	11. $ED-B^3$	12. $iA^2-(EC)^2$

16. Considere la matriz

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$$

Demuestre que la $n-$ésima potencia de esta matriz es

$$A^n=2^n\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

17. Sea A una matriz cuadrada de orden 2 diagonal.
   (a) Demuestre que la matriz A^2 también es diagonal. Halle la forma de la matriz A^2.
   (b) Demuestre que la matriz A^3 también es diagonal. Halle la forma de la matriz A^3.
   (c) ¿Podría generalizar los resultados obtenidos en los ejercicios 17a y 17b para la matriz potencia A^n, con $n\in\mathbb{N}$?

18. Sea A una matriz cuadrada de orden 3 diagonal.
   (a) Demuestre que la matriz A^2 también es diagonal. Halle la forma de la matriz A^2.
   (b) Demuestre que la matriz A^3 también es diagonal. Halle la forma de la matriz A^3.
   (c) ¿Podría generalizar los resultados obtenidos en los ejercicios 18a y 18b para la matriz potencia A^n, con $n\in\mathbb{N}$?

19. Considere la matriz

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Demuestre que la $n-$ésima potencia de esta matriz es

$$A^n=\begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

20. Si A es una matriz cuadrada de orden n, diagonal ¿Podría generalizar los resultados obtenidos en los ejercicios 17 y 18 para la matriz potencia A^m, con $m \in \mathbb{N}$? Demuestre dicho resultado.

21. Sea $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar A^n. ¿Si n es suficientemente grande, entonces A^n es igual a?

22. Calcular las potencias de la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

23. Demuestre que si $A = \begin{pmatrix} -2 & -9 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, entonces,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1-3n & -9n \\ n & 1+3n \end{pmatrix}, \qquad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

24. Encuentre los valores de x, y, z que satisfagan la igualdad

$$\begin{pmatrix} x-y & -1 & 2 \\ 1 & y & -x \\ 0 & z & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 0 & z \\ -z & 2 & 3 \\ -2 & 3 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

25. Encuentre los valores de a, b y c, para que se satisfaga la igualdad

$$\begin{pmatrix} 3-a & b & -2 \\ 4 & 1-c & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & a+b & 4 \\ 1-c & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & a & 2 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

26. Determinar si las siguientes proposiciones son **VERDADERA** o **FALSA**. Justifique todas sus respuestas.

   (a) Si A y B son matrices $n \times n$, entonces $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

   (b) Si A y B son matrices $n \times n$, entonces $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$.

   (c) Si A es una matriz cuadrada de orden n e I_n es la matriz identidad de orden n, entonces $(A+I_n)^2 = A^2 + 2A + I_n$.

   (d) Cualesquiera que sean las matrices A, B y C de tamaño $n \times n$, tales que $AB = AC$, se cumple que $B = C$.

   (e) Si A y B son matrices $n \times n$, entonces $B(AB - BA) = AB^2 - B^2A$.

   (f) Sean A y B dos matrices cuadradas $n \times n$. Luego

   $$AB = BA \qquad \Longrightarrow \qquad (I_n - 2B)A = (I_n - 2A)B,$$

   donde I_n es la matriz identidad de orden n.

   (g) Sea A una matriz cuadrada $n \times n$, tal que $A^2 = 3A - I_n$, entonces $A^3 = 3A - I_n$, I_n es la matriz identidad de orden n.

   (h) Si $AB = 0$ entonces $A = 0$ y/o $B = 0$.

   (i) Si $AB = AC$ entonces $B = C$.

27. Resuelva la ecuación matricial

$$2X + 4A = 3B + 2A,$$

donde,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

28. Hallar la familia de matrices que cumplen la ecuación
$$a^3A^3 + 3a^2A^2 + 3aA + I = 0.$$

29. Resuelva el sistema matricial
$$\begin{cases} 2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ \\ X - \ Y = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

30. Resuelva el siguiente sistema matricial

1. $\begin{cases} 2X - 7Y = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \\ \\ -X + 4Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3X + Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \\ X + 2Y = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$

3. $\begin{cases} X^t + 3Y = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} \\ \\ 2X^t - Y = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \end{cases}$

4. $\begin{cases} (2X - 7Y)^t = \begin{pmatrix} -i & 2+5i \\ 1-2i & 2 \end{pmatrix} \\ \\ X^t + iY^t = \begin{pmatrix} 2i & 2-i \\ 3i & 2+i \end{pmatrix} \end{cases}$

5. $\begin{cases} (2X - 7Y)^t = \begin{pmatrix} -i & 2+5i \\ 1-2i & 2 \end{pmatrix} \\ \\ X + iY = \begin{pmatrix} 2i & 2-i \\ 3i & 2+i \end{pmatrix} \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2X^t + Y = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ \\ X + 2Y^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$

31. Demuestre que si A y B son matrices que conmutan, entonces $(AB)^2 = A^2B^2$.

32. Identificar cuales de las siguientes matrices se encuentra en la forma escalonada o en la forma escalonada reducida por filas. Justifique su respuesta.

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *b.* $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c. $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *d.* $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

33. Considere la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

Encuentre la matriz equivalente a A dada por las siguientes operaciones elementales sobre las filas

$$\frac{1}{3}F_1 \longrightarrow F_1, \qquad 2F_2+F_3 \longrightarrow F_3, \qquad F_1+F_4 \longrightarrow F_4.$$

34. Sea $A = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & i \\ i & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$. Demuestre que A es simétrica y que $A^2 = A$.

35. De un ejemplo de una matriz que no sea idempotente.

36. Sean a, b, c números reales tales que $a^2+b^2+c^2=1$ y consideremos la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Demostrar que la matriz A es antisimétrica.
   (b) Probar que la matriz $M = A^2 + I$ es simétrica.
   (c) Demostrar que la matriz M es idempotente.

37. Sean

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} i-1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

   Calcular

   1. $A - 2B^t$ 2. $A^t + iB$ 3. $3iA^t - (5iB)^t$ 4. $(BA)^t$ 5. $(AB)^t$

38. Demuestre que si A es una matriz cuadrada de orden n, antisimétrica, entonces todas las componentes de la diagonal principal son cero.

39. Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justifique todas sus respuestas.
   (a) Si A y B son simétricas $n \times n$, entonces $A^2 + B^2$ es simétrica.
   (b) Si A y B son antisimétricas $n \times n$, entonces AB es simétrica.
   (c) Si A es una matriz cuadrada de orden n, entonces $A + A^t$ es simétrica.
   (d) Si P y Q son ortogonales $n \times n$, entonces $P + Q$ también lo es.
   (e) Sean A, B y C matrices cuadradas $n \times n$, si C y B son simétricas e invertibles, entonces la matriz $C^t + B^{-1}A^tC^{-1}$ es simétrica.
   (f) La matriz $\begin{pmatrix} \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix}$ es ortogonal.
   (g) Si Q es ortogonal y simétrica, entonces $Q^2 = I$.
   (h) Si P es ortogonal, entonces P^2 lo es.

40. Demuestre que si A y B son matrices cuadradas de orden n, simétricas, entonces $(AB)^t = BA$.

41. Demuestre que si A es una matriz simétrica, entonces, A es una matriz normal, es decir, la matriz cumple con $A^tA = AA^t$.

42. Demuestre que si A es una matriz antsimétrica, entonces, A es una matriz normal.

43. Demuestre que si A es una matriz ortogonal, entonces, A es una matriz normal.

44. Demuestre que si A es una matriz idempotente, entonces $A^n = A$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

45. Demuestre que la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$
es una matriz idempotente.

46. Dada la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$
Demuestre que es una matriz nilpotente de orden 2.

47. Dada la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Demuestre que es una matriz nilpotente de orden 3.

48. Demostrar que la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
es una matriz involutiva.

Respuestas: Ejercicios

1. No existen valores; 2. No existen valores; 3. $a = \pm i$ y $b = 1$; 4. $\alpha = \sqrt{3}i - 1$, $\beta = -1$ y $\gamma = \pm\sqrt{2}i$;

5. $\alpha = 2 + i$, $\beta = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$ y $\alpha = 2 - i$, $\beta = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$; 6. $\begin{pmatrix} -21 & 3 & -12 \\ -9 & -15 & 0 \\ 6 & 3 & -12 \end{pmatrix}$; 7. $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$;

8. $\begin{pmatrix} 1+3i & 1-3i & -2-4i \\ 4-2i & \frac{1}{2} & \frac{8}{3} - \frac{7}{3}i \end{pmatrix}$; 9. $\begin{pmatrix} -\frac{21}{5} & \frac{12}{5} \\ 3 & -6 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$; 10. $\begin{pmatrix} -3 & 12 & 6 \\ 3 & -12 & -6 \\ -2 & 8 & 4 \end{pmatrix}$; 11. No se puede realizar;

12. Falso; 13. No se puede realizar; 14.1. $\begin{pmatrix} -1+i & i \\ -1 & i \end{pmatrix}$; 14.2. No tiene sentido; 14.3. $\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ -15 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$;

14.4. $\begin{pmatrix} -\frac{26}{5} & \frac{22}{5} \\ 7 & -14 \\ -9 & -7 \end{pmatrix}$; 14.5. $\begin{pmatrix} -3 & -3i \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$; 14.6. No tiene sentido; 15.1. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + i & \frac{7}{3} - i \\ \frac{2}{3} - 3i & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$;

15.2. No tiene sentido; 15.3. $\begin{pmatrix} 20 & 4 & 24 \\ -20 & -4 & 24 \end{pmatrix}$; 15.4. $\begin{pmatrix} -\frac{29}{12} & -\frac{47}{30} \\ \frac{1}{6} & \frac{11}{3} \\ \frac{11}{3} & -\frac{17}{3} \end{pmatrix}$; 15.5. $\begin{pmatrix} 9 - \frac{27}{2}i & -11 - \frac{22}{3}i \\ -15 + \frac{25}{3}i & 1 - \frac{35}{2}i \end{pmatrix}$;

15.6. No tiene sentido; 15.7. $\begin{pmatrix} -20-20i & -4-4i & 24i \\ 30-10i & 6-2i & 36+12i \end{pmatrix}$; 15.8. No tiene sentido;

15.9. $\begin{pmatrix} -\frac{57}{4} & -\frac{57}{20} & -\frac{99}{10} \\ -\frac{15}{2} & -\frac{3}{2} & 9 \\ 30 & 6 & 36 \end{pmatrix}$; 15.10. No tiene sentido; 15.11. $\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} + 13i & \frac{25}{2} + 7i \\ \frac{123}{4} - 9i & -\frac{5}{2} + 15i \end{pmatrix}$;

15.12. $\begin{pmatrix} -320 + \frac{17}{36}i & -256 + i \\ -256 + 2i & -320 + \frac{233}{36}i \end{pmatrix}$; 21. $A^n = A$. Si n es suficientemente grande, entonces $A^n = A$;

22. $A^{3n-2} = A$, $A^{3n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $A^{3n} = I$, $n \in \mathbb{N}$.; 24. $x = -1$, $y = 2$, $z = 1$; 25. $a = 6$, $b = 0$, $c = 3$;

26.a. Falso; 26.b. Falso; 26.c. Verdadero; 26.d. Falso; 26.e. Falso; 26.f. Falso; 26.g. Falso;

26.h. Falso; 26.i. Falso; 27. $X = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; 28. $A = -\frac{1}{a} I$; 29. $X = \begin{pmatrix} 17 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$,

$Y = \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$; 30.1. $X = \begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 10 & 27 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$; 30.2. $X = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{7}{5} \\ \frac{7}{5} & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} & -\frac{16}{5} \\ -\frac{16}{5} & -1 \end{pmatrix}$;

30.3. $X^t = \begin{pmatrix} \frac{15}{7} & \frac{10}{7} \\ -\frac{10}{7} & -\frac{15}{7} \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} \frac{9}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{9}{7} \end{pmatrix}$; 30.4. $X^t = \begin{pmatrix} \frac{35}{53} + \frac{96}{53} i & 1 - i \\ \frac{58}{53} + \frac{150}{53} i & \frac{116}{53} + \frac{35}{53} i \end{pmatrix}$, $Y^t = \begin{pmatrix} \frac{10}{53} + \frac{35}{53} i & -i \\ \frac{9}{53} + \frac{58}{53} i & \frac{18}{53} + \frac{10}{53} i \end{pmatrix}$;

30.5. $X = \begin{pmatrix} \frac{35}{53} + \frac{96}{53} i & \frac{100}{53} - \frac{74}{53} i \\ \frac{11}{53} + \frac{171}{53} i & \frac{116}{53} + \frac{35}{53} i \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} \frac{10}{53} + \frac{35}{53} i & \frac{21}{53} - \frac{6}{53} i \\ -\frac{12}{53} + \frac{11}{53} i & \frac{18}{53} + \frac{10}{53} i \end{pmatrix}$; 30.6. $X = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$, $Y^t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{5}{3} & \frac{10}{3} \end{pmatrix}$;

32.a. Escalonada; 32.b. Ninguna; 32.c. Escalona reducida; 32.d. Ninguna; 33. $\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \frac{8}{3} & \frac{13}{3} & -1 & -\frac{11}{3} \end{pmatrix}$;

35. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; 37.1. $\begin{pmatrix} 1-2i & 5 \\ -2 & -9 \end{pmatrix}$; 37.2. $\begin{pmatrix} -2-i & 2+2i \\ 3-i & 1+5i \end{pmatrix}$; 37.3. $\begin{pmatrix} 5+2i & 11i \\ -i & -22i \end{pmatrix}$;

37.4. $\begin{pmatrix} 5-i & 11 \\ -1+3i & 2 \end{pmatrix}$; 37.5. $\begin{pmatrix} -2-i & -3+2i \\ 13 & 9 \end{pmatrix}$; 39.$a$. Verdadero; 39.$b$. Falso; 39.$c$. Verdadero;

39.d. Falso; 39.e. Falso; 39.f. Verdadero; 39.g. Verdadero; 39.h. Verdadero;

Bibliografía

1. **Grossman, Staley I.**: "*Álgebra lineal*". Quinta edición. Mc Graw Hill.
2. **Kolman, B. y Hill, D. R.**: "*Álgebra lineal*". Octava edición. PEARSON Prentice Hall.
3. **Rangel, J., y otros**: "*Problemario de álgebra lineal*". Universidad Metropolitana. 1997.
4. **Anton, H. - Rorres, C.**: "*Elementary linear algebra. Applications version*". Six Edition. WILEY.

Este material ha sido revisado recientemente, pero esto no garantiza que esté libre de errores, por esa razón se agradece reportar cualquier error que usted encuentre en este material enviando un mensaje al correo electrónico

farith.math@gmail.com

indicando donde se encuentra(n) dicho(s) error(es). **MUCHAS GRACIAS**.

Sistemas de ecuaciones lineales

Objetivos a cubrir

Código : MAT-3.02

- Sistemas de m ecuaciones con n incógnitas. Operaciones elementales sobre filas.
- Método de Gauss y método de Gauss-Jordan.
- Sistemas de ecuaciones homogéneos y no homogéneos consistentes e inconsistentes.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 23 *: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones* $\begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ x + 4y = 1 \end{cases}$

Solución : Por cursos previos, son conocidos tres métodos clásicos de resolución de sistema de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas

- Método de reducción.
- Método de igualación.
- Método de sustitución.

Resolvemos este sistema por los tres métodos.

Método de reducción : Multiplicamos la segunda ecuación por -5 y la sumamos a la primera ecuación

$$-5\begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ x + 4y = 1 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ -5x - 20y = -5 \end{cases}$$

$$-22y = -1 \qquad \Longrightarrow \qquad y = \frac{-1}{-22} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{y = \frac{1}{22}.}$$

Sustituimos este valor en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema, por ejemplo, sustituimos en la segunda ecuación

$$x + 4\left(\frac{1}{22}\right) = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad x + \frac{4}{22} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad x + \frac{2}{11} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 1 - \frac{2}{11}$$

$$\Longrightarrow \qquad x = \frac{11-2}{11} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{x = \frac{9}{11}.}$$

Luego, la solución del sistema es $x = \dfrac{9}{11}, \quad y = \dfrac{1}{22}.$

Método de igualación : Despejamos la misma incógnita en ambas ecuaciones, por ejemplo despejamos la incógnita x

$$1^{\text{ra}} \text{ ecuación : } \quad 5x - 2y = 4 \qquad \Longrightarrow \qquad 5x = 4 + 2y \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{4+2y}{5}$$

$$2^{\text{da}} \text{ ecuación : } \quad x + 4y = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 1 - 4y,$$

ahora igualamos los despejes y resolvemos

$$\frac{4+2y}{5} = 1 - 4y \qquad \Longrightarrow \qquad 4 + 2y = 5\,(1-4y) \qquad \Longrightarrow \qquad 4 + 2y = 5 - 20y$$

$$\Longrightarrow \qquad 4 + 2y + 20y = 5 \qquad \Longrightarrow \qquad 22y = 5 - 4 \qquad \Longrightarrow \qquad 22y = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{y = \frac{1}{22}.}$$

Sustituimos este valor en cualquiera de los dos despejes, por ejemplo, sustituimos en $x = 1 - 4y$, así,

$$x = 1 - 4\left(\frac{1}{22}\right) \quad \Longrightarrow \quad x = 1 - \frac{4}{22} \quad \Longrightarrow \quad x = 1 - \frac{2}{11} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{11-2}{11} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x = \frac{9}{11}.}$$

Luego, la solución del sistema es $x = \dfrac{9}{11}$, $\quad y = \dfrac{1}{22}$.

Método de sustitución : Despejamos una de las dos incógnitas en una de las dos ecuaciones, por ejemplo, despejamos la incógnita x de la segunda ecuación del sistema

$$x + 4y = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 1 - 4y,$$

ahora, sustituimos este despeje en la primera ecuación $5x - 2y = 4$ y resolvemos

$$5(1-4y) - 2y = 4 \quad \Longrightarrow \quad 5 - 20y - 2y = 4 \quad \Longrightarrow \quad -22y = 4 - 5 \quad \Longrightarrow \quad -22y = -1$$

$$\Longrightarrow \quad y = \frac{-1}{-22} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{y = \frac{1}{22}.}$$

Sustituimos este valor en el despeje

$$x + 4\left(\frac{1}{22}\right) = 1 \quad \Longrightarrow \quad x + \frac{2}{11} = 1 \quad \Longrightarrow \quad x = 1 - \frac{2}{11} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{11-2}{11} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x = \frac{9}{11}.}$$

Luego, la solución del sistema es $x = \dfrac{9}{11}$, $\quad y = \dfrac{1}{22}$. ★

Ejemplo 24 *: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones* $\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{8}x + \sqrt{2}y = 2 \\ \;2x + \sqrt{8}y = 0 \end{array} \right.$

Solución : Usando el método de sustitución. Despejamos una de las dos incógnita en una de las dos ecuaciones, por ejemplo, despejamos la incógnita x de la segunda ecuación del sistema

$$2x + \sqrt{8}y = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2x = 0 - \sqrt{8}y \quad \Longrightarrow \quad 2x = -\sqrt{8}y \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{\sqrt{8}y}{2},$$

observemos que

$$\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = \sqrt{2^2}\,\sqrt{2} = 2\sqrt{2},$$

por lo tanto,

$$x = -\frac{\sqrt{8}y}{2} = -\frac{2\sqrt{2}y}{2} = -\sqrt{2}y \quad \Longrightarrow \quad x = -\sqrt{2}y,$$

ahora, sustituimos este despeje en la primera ecuación $\sqrt{8}x + \sqrt{2}y = 2$, la cual es equivalente a $2\sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 2$ y resolvemos

$$2\sqrt{2}\left(-\sqrt{2}y\right) + \sqrt{2}y = 2 \quad \Longrightarrow \quad -2\sqrt{2}\,\sqrt{2}y + \sqrt{2}y = 2 \quad \Longrightarrow \quad -2\left(\sqrt{2}\right)^2 y + \sqrt{2}y = 2$$

$$\Longrightarrow \quad -2(2)\,y + \sqrt{2}y = 2 \quad \Longrightarrow \quad -4y + \sqrt{2}y = 2 \quad \Longrightarrow \quad \left(\sqrt{2} - 4\right)y = 2$$

$$\Longrightarrow \quad y = \frac{2}{\sqrt{2} - 4} \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{2}{\left(\sqrt{2}-4\right)}\frac{\left(\sqrt{2}+4\right)}{\left(\sqrt{2}+4\right)} \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{2\left(\sqrt{2}+4\right)}{\left(\sqrt{2}\right)^2 - (4)^2}$$

$$\Longrightarrow \quad y = \frac{2\left(\sqrt{2}+4\right)}{2 - 16} \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{2\left(\sqrt{2}+4\right)}{-14} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{y = -\frac{\sqrt{2}+4}{7}.}$$

Sustituimos este valor en el despeje de x

$$x = -\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}+4}{7}\right) \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+4\right)}{7} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{2}+4\sqrt{2}}{7}$$

$$\Longrightarrow \quad x = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2+4\sqrt{2}}{7} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x = \frac{2+4\sqrt{2}}{7}.}$$

Luego, la solución del sistema es $x = \dfrac{2+4\sqrt{2}}{7}$, $\quad y = -\dfrac{\sqrt{2}+4}{7}$. ★

Ejemplo 25 : *Resolver el siguiente sistema de ecuaciones* $\begin{cases} x - \ \ 4y = 5 \\ 3x - 12y = 0 \end{cases}$

Solución : Usando el método de reducción. Multiplicamos la primera ecuación por -3 y la sumamos a la segunda ecuación

$$-3\begin{cases} x - \ \ 4y = 5 \\ 3x - 12y = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} -3x + 12y = -15 \\ \ \ \ 3x - 12y = \ \ \ \ 0 \end{cases}$$

$$0 = -15 \qquad \leftarrow \text{ No tiene sentido, contradicción.}$$

Por lo que concluimos que el sistema **no tiene solución**. ★

Ejemplo 26 : *Resolver el siguiente sistema de ecuaciones* $\begin{cases} x + \ \ y = \ \ 7 \\ 2x + 2y = 14 \end{cases}$

Solución : Usando el método de reducción. Multiplicamos la primera ecuación por -2 y la sumamos a la segunda ecuación

$$-2\begin{cases} x + \ \ y = \ \ 7 \\ 2x + 2y = 14 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} -2x - 2y = -14 \\ \ \ \ 2x + 2y = \ \ \ 14 \end{cases}$$

$$0 = 0 \qquad \leftarrow \text{ Lo cual es cierto.}$$

Así, se tiene que para obtener las soluciones del sistema se elige una de las ecuaciones del mismo y se despeja una de las incógnitas, por ejemplo, elegimos la primera ecuación y despejamos la incógnita x,

$$x + y = 7 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 7 - y, \quad \text{con} \quad y \in \mathbb{R},$$

entonces, el sistema tiene infinitas soluciones, las cuales viene dada por

$$x = 7 - y, \quad \text{con} \quad y \in \mathbb{R}.$$

★

Ejemplo 27 : *Resolver el siguiente sistema de ecuaciones* $\begin{cases} -x - 4y = 0 \\ \ \ 7x + 2y = 0 \end{cases}$

Solución : Usando el método de reducción. Multiplicamos la primera ecuación por 7 y la sumamos a la segunda ecuación

$$7\begin{cases} -x - 4y = 0 \\ \ \ 7x + 2y = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} -7x - 28y = 0 \\ \ \ \ 7x + \ \ 2y = 0 \end{cases}$$

$$-26y = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{0}{-26} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{y = 0.}$$

Sustituimos este valor en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema, por ejemplo, sustituimos en la primera ecuación

$$x - 4(0) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x - 0 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{x = 0.}$$

Luego, la solución del sistema es la **solución trivial** $x = 0, \quad y = 0.$ ★

Ejemplo 28 *: Escribir la matriz asociada al sistema de ecuaciones* $\begin{cases} 5x_1 + \ \ x_2 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 = \ \ 4 \end{cases}.$

Solución : Tenemos que, la matriz asociada al sistema es la matriz cuya primera columna son los coeficientes de la primera variable del sistema, la segunda columna son los coeficientes de la segunda variable del sistema y así sucesivamente, por lo tanto, la matriz asociada al sistema dado viene dada por

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

★

Ejemplo 29 *: Escribir la forma matricial del sistema,* $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$*, para el sistema*

$$\begin{cases} 5x_1 + \ \ x_2 + x_3 = -1 \\ 4x_1 - 7x_2 - x_3 = \ \ 2 \end{cases},$$

especificando A*,* $\boldsymbol{x}$ *y* $\boldsymbol{b}$*.*

Solución : Tenemos que

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 4 & -7 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

donde,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 4 & -7 & -1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

★

Ejemplo 30 *: ¿Es* $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ *una solución del siguiente sistema?*

$$\begin{cases} 5x_1 - \ \ x_2 + 2x_3 = \ \ 7 \\ -2x_1 + 6x_2 + 9x_3 = \ \ 0 \\ -7x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -7 \end{cases}$$

Solución : Tenemos que

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -2 & 6 & 9 \\ -7 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix},$$

donde,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -2 & 6 & 9 \\ -7 & 5 & -3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix},$$

entonces, $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ es solución del sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, si al sustituir dicho vector en el sistema se satisface la igualdad, así,

$$A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -2 & 6 & 9 \\ -7 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (5)(3) + (-1)(4) + (2)(-2) \\ (-2)(3) + (6)(4) + (9)(-2) \\ (-7)(3) + (5)(4) + (-3)(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{b},$$

por lo tanto, el vector dado **no** es solución del sistema. ★

Ejemplo 31 *: Considere el sistema de ecuaciones lineales* $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \qquad + 2x_4 = -2 \\ 3x_1 + \ x_2 + \ x_3 - \ x_4 = -1 \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 18 \end{cases}$ *¿Es el vector* $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ *solución del sistema?*

Solución : Tenemos que

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 18 \end{pmatrix},$$

donde,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 18 \end{pmatrix},$$

entonces, $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ es solución del sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, si al sustituir dicho vector en el sistema se satisface la igualdad, así,

$$A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)(-2) + (2)(0) + (0)(3) + (2)(-2) \\ (3)(-2) + (1)(0) + (1)(3) + (-1)(-2) \\ (-2)(-2) + (3)(0) + (2)(3) + (-4)(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 18 \end{pmatrix} = \boldsymbol{b},$$

por lo tanto, el vector dado **si** es solución del sistema. ★

Ejemplo 32 *: Considere el sistema de ecuaciones* $\begin{cases} 2x_1 + \ x_2 = -2 \\ 3x_1 + 4x_2 = \ \ 4 \end{cases}$

1. *Escribir la matriz asociada al sistema.*
2. *Escribir la forma matricial del sistema,* $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$*, especificando* A*,* $\boldsymbol{x}$ *y* $\boldsymbol{b}$*.*
3. *Escribir la matriz aumentada del sistema.*
4. *Utilice el método de eliminación de Gauss para obtener las soluciones del sistema, si es que existen.*

Solución : 1. Tenemos que la matriz asociada al sistema viene dada por

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Tenemos que

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

donde,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

3. Matriz aumentada del sistema

$$(A \mid \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 4 \end{array}\right).$$

4. Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada para transformar dicha matriz en una versión de su forma escalonada (método de eliminación gaussiana)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}F_1 \to F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 3 & 4 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{-3F_1 + F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{5}{2} & 7 \end{array}\right),$$

entonces,

$$\begin{cases} \text{De la segunda fila} \ : \ \dfrac{5}{2}\, x_2 = 7 \\ \text{De la primera fila} \ : \ x_1 + \dfrac{1}{2}\, x_2 = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \boxed{x_2 = \dfrac{14}{5}} \\ x_1 = -\dfrac{1}{2}\, x_2 - 1 \end{cases} \Longrightarrow x_1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{14}{5}\right) - 1$$

$$\Longrightarrow \boxed{x_1 = -\frac{12}{5}.}$$

Luego, la solución del sistema es $x_1 = -\dfrac{12}{5}, \quad x_2 = \dfrac{14}{5}.$ ★

Ejemplo 33 *: Encuentre el punto* $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ *que pertenece tanto a la recta* $x_1 + 5x_2 = 7$ *como a la recta* $x_1 - 2x_2 = -2$*.*

Solución : Buscamos el punto común, punto de intersección entre las rectas para ello resolvemos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = \;\;7 \\ x_1 - 2x_2 = -2 \end{cases},$$

cuya matriz aumentada viene dada por

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 7 \\ 1 & -2 & -2 \end{array}\right).$$

Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada para transformar dicha matriz en su forma escalonada (método de eliminación gaussiana)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 7 \\ 1 & -2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_1+F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 7 \\ 0 & -7 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{7}F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & \dfrac{9}{7} \end{array}\right),$$

entonces,

$$\begin{cases} \text{De la segunda fila} \;:\; x_2 = \dfrac{9}{7} \\ \text{De la primera fila} \;:\; x_1 + 5x_2 = 7 \end{cases} \implies \begin{cases} \boxed{x_2 = \dfrac{9}{7}} \\ x_1 + 5x_2 = 7 \end{cases} \implies x_1 + 5\left(\frac{9}{7}\right) = 7$$

$$\implies x_1 = -\frac{45}{7} + 7 \implies \boxed{x_1 = -\frac{4}{7}.}$$

Luego, el punto de intersección entre las rectas es $\left(-\dfrac{4}{7}, \dfrac{9}{7}\right)$. ★

Ejemplo 34 *: Considere el sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ \;\;6x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ -6x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 3 \end{cases}$$

1. *Escribir la matriz asociada al sistema.*
2. *Escribir la forma matricial del sistema,* $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, *especificando* A, $\boldsymbol{x}$ *y* $\boldsymbol{b}$.
3. *Escribir la matriz aumentada del sistema.*
4. *Utilice el método de eliminación de Gauss para obtener las soluciones del sistema, si es que existen.*

Solución : 1. Tenemos que, la matriz asociada al sistema viene dada por

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 \\ 6 & -2 & -5 \\ -6 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

2. Tenemos que

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \qquad \implies \qquad \begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 \\ 6 & -2 & -5 \\ -6 & 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

donde,

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 \\ 6 & -2 & -5 \\ -6 & 4 & 7 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

3. Matriz aumentada del sistema

$$(A \mid \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{rrr|r} -4 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & -2 & -5 & 0 \\ -6 & 4 & 7 & 3 \end{array}\right).$$

4. Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada para transformar dicha matriz en una versión de su forma escalonada (método de eliminación gaussiana)

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -4 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & -2 & -5 & 0 \\ -6 & 4 & 7 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{4}F_1 \to F_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{4} \\ 6 & -2 & -5 & 0 \\ -6 & 4 & 7 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{-6F_1+F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ -6 & 4 & 7 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{6F_1+F_3 \to F_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{3}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{-F_2+F_3 \to F_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

entonces,

$$\left\{\begin{array}{l} \text{De la segunda fila} \ : \ x_2 + x_3 = \dfrac{3}{2} \\[2ex] \text{De la primera fila} \ : \ x_1 - \dfrac{1}{2}\,x_2 - x_3 = -\dfrac{1}{4} \end{array}\right. \qquad \Longrightarrow \qquad \left\{\begin{array}{l} \boxed{x_3 = \dfrac{3}{2} - x_2} \\[2ex] x_1 - \dfrac{1}{2}\,x_2 - x_3 = -\dfrac{1}{4} \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \quad x_1 - \frac{1}{2}\,x_2 - \left(\frac{3}{2} - x_2\right) = -\frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad x_1 + \frac{1}{2}\,x_2 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{4}$$

$$\Longrightarrow \quad x_1 = -\frac{1}{2}\,x_2 - \frac{1}{4} + \frac{3}{2} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x_1 = -\frac{1}{2}\,x_2 + \frac{5}{4}.}$$

Así, el sistema tiene infinitas soluciones

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2}\,x_2 + \dfrac{5}{4} \\[2ex] x_2 \\[2ex] \dfrac{3}{2} - x_2 \end{pmatrix} \qquad \text{con} \qquad x_2 \in \mathbb{R}.$$

★

Ejemplo 35 *: Considere el sistema de ecuaciones*

$$\left\{\begin{array}{rl} 2x_1+5x_2-\ x_3 = & 1 \\ 7x_2-2x_3 = & -1 \\ -x_1+3x_2-\ x_3 = & 2 \end{array}\right.$$

1. *Escribir la matriz asociada al sistema.*
2. *Escribir la forma matricial del sistema,* $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$*, especificando* A*,* $\boldsymbol{x}$ *y* $\boldsymbol{b}$*.*
3. *Escribir la matriz aumentada del sistema.*
4. *Utilice el método de eliminación de Gauss para obtener las soluciones del sistema, si es que existen.*

Solución : 1. Tenemos que la matriz asociada al sistema viene dada por

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & 7 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Tenemos que

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & 7 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

donde,

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & 7 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3. Matriz aumentada del sistema

$$(A \mid \boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

4. Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada para transformar dicha matriz en una versión de su forma escalonada (método de eliminación gaussiana)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1\longleftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_1\to F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 7 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-2F_1+F_3\to F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 7 & -2 & -1 \\ 0 & 11 & -3 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{7}F_2\to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -\dfrac{2}{7} & -\dfrac{1}{7} \\ 0 & 11 & -3 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-11F_2+F_3\to F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -\dfrac{2}{7} & -\dfrac{1}{7} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{7} & \dfrac{46}{7} \end{array}\right),$$

entonces,

$$\left\{\begin{array}{l} \text{De la tercera fila } : \ \dfrac{1}{7}\, x_3 = \dfrac{46}{7} \\ \\ \text{De la segunda fila } : \ x_2 - \dfrac{2}{7}\, x_3 = -\dfrac{1}{7} \\ \\ \text{De la primera fila } : \ x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \end{array}\right. \qquad \Longrightarrow \qquad \left\{\begin{array}{l} \boxed{x_3 = 46} \\ \\ x_2 - \dfrac{2}{7}\, x_3 = -\dfrac{1}{7} \\ \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x_2 - \dfrac{2}{7}(46) = -\dfrac{1}{7} \\ \\ x_1 - 3x_2 + (46) = 2 \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x_2 = \dfrac{92}{7} - \dfrac{1}{7} \\ \\ x_1 - 3x_2 = 2 - 46 \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \boxed{x_2 = 13} \\ \\ x_1 - 3x_2 = -44 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \quad x_1 - 3\,(13) = -44 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 39 - 44 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x_1 = -5.}$$

La solución del sistema es el vector

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 13 \\ 46 \end{pmatrix}.$$

★

Ejemplo 36 *: Considere el sistema de ecuaciones lineales*

$$\left\{\begin{array}{l} 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 1 \\ \ \ x_1 + \ \ x_2 - 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 5 \end{array}\right.$$

1. *Escribir la matriz asociada al sistema.*
2. *Escribir la forma matricial del sistema,* $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, *especificando* A, $\boldsymbol{x}$ *y* $\boldsymbol{b}$.
3. *Escribir la matriz aumentada del sistema.*
4. *Utilice el método de eliminación de Gauss para obtener las soluciones del sistema, si es que existen.*

Solución : 1. Tenemos que la matriz asociada al sistema viene dada por

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

2. Tenemos que

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 3 & 6 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix},$$

donde,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -6 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

3. Matriz aumentada del sistema

$$(A \mid \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 6 \\ 2 & 2 & -6 & 5 \end{array}\right).$$

4. Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada para transformar dicha matriz en una versión de su forma escalonada (método de eliminación gaussiana)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 6 \\ 2 & 2 & -6 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \longleftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -6 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{-3F_1+F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & 7 & -17 \\ 2 & 2 & -6 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-2F_1+F_3 \to F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & 7 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right).$$

Observemos la última fila de esta matriz, se tiene que

$$0x + 0y + 0z = -7 \qquad \Longrightarrow \qquad 0 = -7 \quad \leftarrow \quad \text{No tiene sentido, contradicción.}$$

Por lo que concluimos que el sistema **no tiene solución**. ★

Ejemplo 37 : *Considere el sistema de ecuaciones*

$$\left\{ \begin{array}{rl} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = & 8 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = & -4 \\ 14x_2 - 2x_3 = & -15 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = & 4 \end{array} \right.$$

1. *Escribir la matriz asociada al sistema.*
2. *Escribir la forma matricial del sistema,* $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, *especificando* A, $\boldsymbol{x}$ *y* $\boldsymbol{b}$.
3. *Escribir la matriz aumentada del sistema.*
4. *Utilice el método de eliminación de Gauss para obtener las soluciones del sistema, si es que existen.*

Solución : 1. Tenemos que la matriz asociada al sistema viene dada por

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -4 \\ 0 & 14 & -2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Tenemos que

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -4 \\ 0 & 14 & -2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -15 \\ 4 \end{pmatrix},$$

donde,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -4 \\ 0 & 14 & -2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -15 \\ 4 \end{pmatrix}$$

3. Matriz aumentada del sistema

$$(A \mid \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 2 & 8 \\ 1 & 5 & -4 & -4 \\ 0 & 14 & -2 & -15 \\ 3 & 4 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

4. Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada para transformar dicha matriz en una versión de su forma escalonada (método de eliminación gaussiana)

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 2 & 8 \\ 1 & 5 & -4 & -4 \\ 0 & 14 & -2 & -15 \\ 3 & 4 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & -4 & -4 \\ 2 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & 14 & -2 & -15 \\ 3 & 4 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{-2F_1+F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & -4 & -4 \\ 0 & -11 & 10 & 16 \\ 0 & 14 & -2 & -15 \\ 3 & 4 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-3F_1+F_3 \to F_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & -4 & -4 \\ 0 & -11 & 10 & 16 \\ 0 & 14 & -2 & -15 \\ 0 & -11 & 10 & 16 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_2+F_4 \to F_4} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & -4 & -4 \\ 0 & -11 & 10 & 16 \\ 0 & 14 & -2 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{11}F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & -\dfrac{10}{11} & -\dfrac{16}{11} \\ 0 & 14 & -2 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-14F_2+F_3 \to F_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & -\dfrac{10}{11} & -\dfrac{16}{11} \\ 0 & 0 & \dfrac{118}{11} & \dfrac{59}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

entonces,

$$\left\{\begin{array}{l} \text{De la tercera fila} \ : \ \dfrac{118}{11}x_3 = \dfrac{59}{11} \\ \\ \text{De la segunda fila} \ : \ x_2 - \dfrac{10}{11}x_3 = -\dfrac{16}{11} \\ \\ \text{De la primera fila} \ : \ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -4 \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{l} \boxed{x_3 = \dfrac{1}{2}} \\ \\ x_2 - \dfrac{10}{11}x_3 = -\dfrac{16}{11} \\ \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -4 \end{array}\right.$$

$$\implies \left\{\begin{array}{l} x_2 - \dfrac{10}{11}\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{16}{11} \\ \\ x_1 + 5x_2 - 4\left(\dfrac{1}{2}\right) = -4 \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{l} x_2 = -\dfrac{16}{11} + \dfrac{5}{11} \\ \\ x_1 + 5x_2 = -4 + 2 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x_2 = -1} \\ \\ x_1 + 5x_2 = -2 \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad x_1 + 5(-1) = -2 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x_1 = 3}$$

La solución del sistema es el vector

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

★

Ejemplo 38 *: Hallar la(s) solucion(es) del siguiente sistema*

$$\left\{ \begin{array}{rl} 2x_1 - x_2 + 2x_3 & = -3 \\ 3x_2 + 6x_3 - 2x_4 & = 1 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_4 & = -2 \end{array} \right.$$

Solución : Consideremos la matriz aumentada asociada al sistema

$$(A \mid \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 6 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & -1 & -2 \end{array} \right).$$

Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada (que es equivalente a aplicar las operaciones elementales sobre las filas de la matriz de coeficientes) para transformar dicha matriz en una versión de su forma escalonada (método de eliminación gaussiana)

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 6 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & -1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{2}F_1 \to F_1} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 3 & 6 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & -1 & -2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{2F_1 + F_3 \to F_3} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 3 & 6 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -5 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \longleftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 6 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{-3F_2 + F_3 \to F_3} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 16 \end{array} \right),$$

entonces,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{De la tercera fila} \; : \; x_4 = 16 \\ \\ \text{De la segunda fila} \; : \; x_2 + 2x_3 - x_4 = -5 \\ \\ \text{De la primera fila} \; : \; x_1 - \dfrac{1}{2}\, x_2 + x_3 = -\dfrac{3}{2} \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x_4 = 16} \\ \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = -5 \\ \\ x_1 - \dfrac{1}{2}\, x_2 + x_3 = -\dfrac{3}{2} \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x_2 + 2x_3 - (16) = -5 \\[2ex] x_1 - \dfrac{1}{2}\, x_2 + x_3 = -\dfrac{3}{2} \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x_2 = 11 - 2x_3} \\[2ex] x_1 - \dfrac{1}{2}\, x_2 + x_3 = -\dfrac{3}{2} \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow \quad x_1 - \frac{1}{2}\,(11 - 2x_3) + x_3 = -\frac{3}{2} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x_1 = 4 - 2x_3,}$$

con $x_3 \in \mathbb{R}$. Así, el sistema tiene infinitas soluciones

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 - 2x_3 \\ 11 - 2x_3 \\ x_3 \\ 16 \end{pmatrix} \qquad \text{con} \quad x_3 \in \mathbb{R}.$$

★

Ejemplo 39 *: Hallar la(s) solucion(es) del siguiente sistema*

$$\left\{ \begin{array}{r} 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 6x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 0 \end{array} \right. .$$

Solución : Observemos que el sistema es homogéneo, por lo tanto, es consistente, es decir, siempre tiene solución. Consideremos la matriz aumentada asociada al sistema

$$(A \mid \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{rrr|r} 5 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & 0 \\ 6 & 2 & 7 & 0 \end{array} \right).$$

Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada (que es equivalente a aplicar las operaciones elementales sobre las filas de la matriz de coeficientes) para transformar dicha matriz en una versión de su forma escalonada (método de eliminación gaussiana)

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 5 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & 0 \\ 6 & 2 & 7 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \longleftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 4 & 0 \\ 5 & 4 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & 7 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-5F_1 + F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 19 & -22 & 0 \\ 6 & 2 & 7 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{-6F_1 + F_3 \to F_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 19 & -22 & 0 \\ 0 & 20 & -17 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{19} F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -\dfrac{22}{19} & 0 \\ 0 & 20 & -17 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{-20F_2 + F_3 \to F_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -\dfrac{22}{19} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{117}{19} & 0 \end{array} \right),$$

entonces,

$$\left\{\begin{array}{l} \text{De la tercera fila} \ : \ \dfrac{117}{19}\,x_3 = 0 \\[2ex] \text{De la segunda fila} \ : \ x_2 - \dfrac{22}{19}\,x_3 = 0 \\[2ex] \text{De la primera fila} \ : \ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{x_3 = 0} \\[2ex] x_2 - \dfrac{22}{19}\,x_3 = 0 \\[2ex] x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2 - \dfrac{22}{19}\,(0) = 0 \\[2ex] x_1 - 3x_2 + 4\,(0) = 0 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{x_2 = 0} \\[2ex] x_1 - 3x_2 = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \quad x_1 - 3\,(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x_1 = 0.}$$

La solución del sistema es la **solución trivial**, el vector $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. ★

Ejemplo 40 *: Hallar la(s) solucion(es) del siguiente sistema*

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} x_1 + & x_2 + & x_3 + & x_4 & = 0 \\ -2x_1 & & +5x_3 & & = 0 \\ 4x_1 + & 2x_2 - & x_3 + & 6x_4 & = 0 \end{array}\right. .$$

Solución : Observemos que el sistema es homogéneo, por lo tanto, es consistente, es decir, siempre tiene solución. Consideremos la matriz aumentada asociada al sistema

$$(A \mid \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 6 & 0 \end{array}\right).$$

Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada (que es equivalente a aplicar las operaciones elementales sobre las filas de la matriz de coeficientes) para transformar dicha matriz en una versión de su forma escalonada (método de eliminación gaussiana)

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{2F_1+F_2\to F_2} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-4F_1+F_3\to F_3} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}F_2\to F_2} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \dfrac{7}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{2F_2+F_3\to F_3} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \dfrac{7}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right),$$

entonces,

$$\begin{cases} \text{De la tercera fila} \; : \; -2x_3 + 4x_4 = 0 \\ \\ \text{De la segunda fila} \; : \; x_2 + \dfrac{7}{2}\, x_3 + x_4 = 0 \\ \\ \text{De la primera fila} \; : \; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \boxed{x_3 = 2x_4} \\ \\ x_2 + \dfrac{7}{2}\, x_3 + x_4 = 0 \\ \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_2 + \dfrac{7}{2}\, (2x_4) + x_4 = 0 \\ \\ x_1 + x_2 + (2x_4) + x_4 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \boxed{x_2 = -8x_4} \\ \\ x_1 + x_2 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad x_1 + (-8x_4) + 3x_4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x_1 = 5x_4}$$

con $x_4 \in \mathbb{R}$.

Luego, el sistema tiene infinitas soluciones,

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 5x_4 \\ -8x_4 \\ 2x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} \qquad \text{con} \quad x_4 \in \mathbb{R}.$$

★

Ejemplo 41 *: Hallar la(s) solucion(es) del siguiente sistema*

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases}$$

Solución : Observemos que el sistema es homogéneo, por lo tanto, es consistente, es decir, siempre tiene solución. Consideremos la matriz aumentada asociada al sistema

$$(A \mid \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 3 & -5 & -1 & 0 \\ 1 & -5 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 5 & -6 & 0 \end{array}\right).$$

Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada (que es equivalente a aplicar las operaciones elementales sobre las filas de la matriz de coeficientes) para transformar dicha matriz en una versión de su forma escalonada (método de eliminación gaussiana).

En este ejemplo, a diferencia de los ejemplos 39 y 40, aplicamos las operaciones elementales sobre las filas de la matriz de coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & -1 \\ 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & 5 & -6 \end{pmatrix},$$

para transformar dicha matriz en una versión de su forma escalonada (método de eliminación gaussiana)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & -1 \\ 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & 5 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \longleftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2F_1+F_2 \to F_2} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 13 & -9 & -5 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & 5 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3F_1+F_4 \to F_4} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 13 & -9 & -5 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 13 & -8 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-F_1+F_5 \to F_5} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 13 & -9 & -5 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 13 & -8 & -2 \\ 0 & 4 & -3 & -3 \\ 4 & 0 & 5 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{-4F_1+F_6 \to F_6} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 13 & -9 & -5 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 13 & -8 & -2 \\ 0 & 4 & -3 & -3 \\ 0 & 20 & -3 & -14 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{13}F_2 \to F_2} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -\dfrac{9}{13} & -\dfrac{5}{13} \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 13 & -8 & -2 \\ 0 & 4 & -3 & -3 \\ 0 & 20 & -3 & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow{-4F_2+F_3 \to F_3} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -\dfrac{9}{13} & -\dfrac{5}{13} \\ 0 & 0 & \dfrac{23}{13} & \dfrac{59}{13} \\ 0 & 13 & -8 & -2 \\ 0 & 4 & -3 & -3 \\ 0 & 20 & -3 & -14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -\dfrac{9}{13} & -\dfrac{5}{13} \\ 0 & 0 & \dfrac{23}{13} & \dfrac{59}{13} \\ 0 & 13 & -8 & -2 \\ 0 & 4 & -3 & -3 \\ 0 & 20 & -3 & -14 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-13F_2+F_4\to F_4} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -\dfrac{9}{13} & -\dfrac{5}{13} \\ 0 & 0 & \dfrac{23}{13} & \dfrac{59}{13} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & -3 \\ 0 & 20 & -3 & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow{-4F_2+F_5\to F_5} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -\dfrac{9}{13} & -\dfrac{5}{13} \\ 0 & 0 & \dfrac{23}{13} & \dfrac{59}{13} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -\dfrac{3}{13} & -\dfrac{19}{13} \\ 0 & 20 & -3 & -14 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-20F_2+F_6\to F_6} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -\dfrac{9}{13} & -\dfrac{5}{13} \\ 0 & 0 & \dfrac{23}{13} & \dfrac{59}{13} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -\dfrac{3}{13} & -\dfrac{19}{13} \\ 0 & 0 & \dfrac{141}{13} & -\dfrac{82}{13} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3\longleftrightarrow F_4} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -\dfrac{9}{13} & -\dfrac{5}{13} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \dfrac{23}{13} & \dfrac{59}{13} \\ 0 & 0 & -\dfrac{3}{13} & -\dfrac{19}{13} \\ 0 & 0 & \dfrac{141}{13} & -\dfrac{82}{13} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{23}{13}F_3+F_4\to F_4} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -\dfrac{9}{13} & -\dfrac{5}{13} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{10}{13} \\ 0 & 0 & -\dfrac{3}{13} & -\dfrac{19}{13} \\ 0 & 0 & \dfrac{141}{13} & -\dfrac{82}{13} \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{3}{13}F_3+F_5\to F_5} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -\dfrac{9}{13} & -\dfrac{5}{13} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{10}{13} \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{10}{13} \\ 0 & 0 & \dfrac{141}{13} & -\dfrac{82}{13} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{13} & -\frac{5}{13} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{10}{13} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{10}{13} \\ 0 & 0 & \frac{141}{13} & -\frac{82}{13} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{141}{13}F_3+F_6\to F_6} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{13} & -\frac{5}{13} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{10}{13} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{10}{13} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{505}{13} \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{13}{10}F_4\to F_4} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{13} & -\frac{5}{13} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{10}{13} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{505}{13} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{10}{13}F_4+F_5\to F_5} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{13} & -\frac{5}{13} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{505}{13} \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{505}{13}F_4+F_6\to F_6} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{13} & -\frac{5}{13} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

entonces,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{De la cuarta fila} \ : \ x_4 = 0 \\ \\ \text{De la tercera fila} \ : \ x_3 + 3x_4 = 0 \\ \\ \text{De la segunda fila} \ : \ x_2 - \dfrac{9}{13}\,x_3 - \dfrac{5}{13}\,x_4 = 0 \\ \\ \text{De la primera fila} \ : \ x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x_4 = 0} \\ \\ x_3 + 3x_4 = 0 \\ \\ x_2 - \dfrac{9}{13}\,x_3 - \dfrac{5}{13}\,x_4 = 0 \\ \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x_3 + 3\,(0) = 0 \\ \\ x_2 - \dfrac{9}{13}\,x_3 - \dfrac{5}{13}\,(0) = 0 \\ \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 2\,(0) = 0 \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x_3 = 0} \\ \\ x_2 - \dfrac{9}{13}\,x_3 = 0 \\ \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x_2 - \dfrac{9}{13}(0) = 0 \\ \\ x_1 - 5x_2 + 2(0) = 0 \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x_2 = 0} \\ \\ x_1 - 5x_2 = 0 \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow \quad x_1 - 5(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x_1 = 0}$$

La solución del sistema es la **solución trivial**, el vector

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

★

Ejemplo 42 *: Sean* $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ *y* $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. *Hallar las componentes del vector* $\boldsymbol{x}$ *para que* $A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}$ *sea igual al vector* $\boldsymbol{0}$.

Solución : Tenemos que

$$A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha + 3\beta \\ 4\alpha - \beta \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha + 3\beta - 1 \\ 4\alpha - \beta - 4 \end{pmatrix},$$

de aquí,

$$\begin{pmatrix} 2\alpha + 3\beta - 1 \\ 4\alpha - \beta - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\alpha + 3\beta - 1 = 0 \\ 4\alpha - \beta - 4 = 0 \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\alpha + 3\beta = 1 \\ 4\alpha - \beta = 4 \end{array} \right.$$

Aplicamos el método de Gauss-Jordan a la matriz aumentada asociada al sistema para escribirla a su forma escalonada reducida

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{2}F_1 \to F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \dfrac{3}{2} & \dfrac{1}{2} \\ 4 & -1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{-4F_1 + F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \dfrac{3}{2} & \dfrac{1}{2} \\ 0 & -7 & 2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{7}F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \dfrac{3}{2} & \dfrac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\dfrac{2}{7} \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{3}{2}F_2 + F_1 \to F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \dfrac{13}{14} \\ 0 & 1 & -\dfrac{2}{7} \end{array} \right)$$

así, de la primera fila se tiene que $\alpha = \dfrac{13}{14}$, mientras que de la segunda fila se obtiene que $\beta = -\dfrac{2}{7}$, por lo que, el vector $\boldsymbol{x}$ viene dado por

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \dfrac{13}{14} \\ -\dfrac{2}{7} \end{pmatrix}.$$

★

Ejemplo 43 *: Hallar el valor de* c_1 *y* c_2*, tal que,* $c_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Solución : Tenemos que

$$c_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2c_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2c_1 - c_2 \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de aquí,

$$\begin{cases} 2c_1 - c_2 = 0 \\ c_1 + c_2 = 0 \end{cases}, \qquad \text{la matriz aumentada asociada es} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Aplicamos el método de Gauss-Jordan para reducir la matriz

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \longleftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-2F_1+F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{3}F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

por lo tanto, de la segunda fila se tiene que

$$c_2 = 0$$

y de la primera fila

$$c_1 + c_2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad c_1 = -c_2 \qquad \Longrightarrow \qquad c_1 = 0.$$

Luego,

$$c_1 = 0 \qquad \text{y} \qquad c_2 = 0.$$

★

Ejemplo 44 *: Demuestre que si* $\boldsymbol{y}$ *y* $\boldsymbol{z}$ *son soluciones del sistema* $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$*, entonces* $\boldsymbol{w} = \frac{1}{4}\,\boldsymbol{y} + \frac{3}{4}\,\boldsymbol{z}$ *es solución del sistema.*

Demostración : Si $\boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{z}$ son soluciones del sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, entonces

$$A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} \qquad \text{y} \qquad A\boldsymbol{z} = \boldsymbol{b},$$

así,

$$A\boldsymbol{w} = A\left(\frac{1}{4}\,\boldsymbol{y} + \frac{3}{4}\,\boldsymbol{z}\right) = \frac{1}{4}\,A\boldsymbol{y} + \frac{3}{4}\,A\boldsymbol{z} = \frac{1}{4}\,\boldsymbol{b} + \frac{3}{4}\,\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b},$$

luego, $\boldsymbol{w} = \frac{1}{4}\,\boldsymbol{y} + \frac{3}{4}\,\boldsymbol{z}$ es solución del sistema. ★

Ejemplo 45 *: Considere el sistema homogéneo* $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ *y sean* $\boldsymbol{x_1}$*,* $\boldsymbol{x_2}$ *soluciones de dicho sistema. Demuestre que* $\boldsymbol{w} = c_1\boldsymbol{x_1} + c_2\boldsymbol{x_2}$ *también es solución, para todo* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Demostración : Si $\boldsymbol{x_1}$ y $\boldsymbol{x_2}$ son soluciones del sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, entonces

$$A\boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{0} \qquad \text{y} \qquad A\boldsymbol{x_2} = \boldsymbol{0},$$

así,

$$A\boldsymbol{w} = A\left(c_1\boldsymbol{x_1} + c_2\boldsymbol{x_2}\right) = c_1A\boldsymbol{x_1} + c_2A\boldsymbol{x_2} = c_1\boldsymbol{0} + c_2\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0},$$

luego, $\boldsymbol{w} = c_1\boldsymbol{x_1} + c_2\boldsymbol{x_2}$ es solución del sistema homogéneo. ★

Ejemplo 46 *: Dado el sistema de ecuaciones lineales*

$$\begin{cases} 3x+2y-z=1 \\ x+w=b \\ x+y+z=1 \\ x-aw=1 \end{cases}$$

Encuentre los valores de a *y* b *para que el sistema*

(i) *Sea inconsistente.*

(ii) *Tenga infinitas soluciones. Hallar las soluciones.*

(iii) *Tenga solución única. Hallar la solución.*

Solución : Consideremos la matriz aumentada asociada al sistema

$$(A \mid \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -a & 1 \end{array}\right)$$

Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada (que es equivalente a aplicar las operaciones elementales a la matriz de coeficientes) para transformar dicha matriz en una versión de su forma escalonada (método de eliminación gaussiana)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -a & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \longleftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & b \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -a & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-F_1+F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & b-1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -a & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-3F_1+F_3 \to F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & b-1 \\ 0 & -1 & -4 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -a & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-F_1+F_4 \to F_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & b-1 \\ 0 & -1 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -a & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1-b \\ 0 & -1 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -a & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2+F_3 \to F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1-b \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -1-b \\ 0 & -1 & -1 & -a & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2+F_4 \to F_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1-b \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -1-b \\ 0 & 0 & 0 & -1-a & 1-b \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{3}F_3 \to F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1-b \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{1}{3} & \dfrac{1+b}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -1-a & 1-b \end{array}\right) \xrightarrow{-F_4 \to F_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1-b \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{1}{3} & \dfrac{1+b}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1+a & b-1 \end{array}\right)$$

(i) Si $a=-1$ y $b\neq 1$, entonces la matriz queda

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1-b \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{1}{3} & \dfrac{1+b}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1 \end{array}\right)$$

Observemos que la cuarta fila nos lleva a la ecuación

$$0x+0y+0z+0w=b-1 \qquad \Longrightarrow \qquad 0=b-1,$$

es decir, $b=1$, pero tenemos que $b\neq 1$. Por lo tanto, el sistema es **inconsistente** para $a=-1$ y $b\neq 1$.

(ii) Sean $a=-1$ y $b=1$, entonces la matriz queda

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Observemos que la cuarta fila nos lleva a la ecuación

$$0x+0y+0z+0w=0 \qquad \Longrightarrow \qquad 0=0,$$

lo cual simepre se cumple. Por lo tanto, el sistema es **consistente** si $a=-1$ y $b=1$, es decir, tiene solución.

Buscamos la(s) solucion(es)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{De la primera fila} \ : \ x+y+z=1 \\ \text{De la segunda fila} \ : \ y+z-w=0 \\ \text{De la tercera fila} \ : \ z+\dfrac{1}{3}\,w=\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$$

De la ecuación dada por la tercera fila despejamos w y aplicamos sustitución hacia atrás

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ y+z-w=0 \\ \boxed{w=2-3z} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ y+z-(2-3z)=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ y=-z+(2-3z) \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ \boxed{y=2-4z} \end{array}\right. \Longrightarrow \quad x=1-(2-4z)-z \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x=3z-1}$$

luego, el sistema tiene infinitas soluciones, las cuales vienen dadas por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3z-1 \\ 2-4z \\ z \\ 2-3z \end{pmatrix}, \qquad \text{con} \quad z\in\mathbb{R}.$$

(iii) Si $a\neq -1$, entonces de la matriz

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1-b \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{1}{3} & \dfrac{1+b}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1+a & b-1 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{De la primera fila} \ : \ x+y+z=1 \\ \text{De la segunda fila} \ : \ y+z-w=1-b \\ \text{De la tercera fila} \ : \ z+\dfrac{1}{3}\,w=\dfrac{1+b}{3} \\ \text{De la cuarta fila} \ : \ (a+1)\,w=b-1 \end{array}\right. .$$

De la ecuación proporcionada por la cuarta fila despejamos w, observe que podemos dividir entre $a+1$, ya que es un valor diferente de cero, pues $a \neq -1$.

Aplicamos sustitucción hacia atrás

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ y+z-w=1-b \\ z+\dfrac{1}{3}\,w=\dfrac{1+b}{3} \\ \boxed{w=\dfrac{b-1}{a+1}} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ y+z-\left(\dfrac{b-1}{a+1}\right)=1-b \\ z+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{b-1}{a+1}\right)=\dfrac{1+b}{3} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ y+z=1-b+\dfrac{b-1}{a+1} \\ z=\dfrac{1+b}{3}-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{b-1}{a+1}\right) \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ y+z=\dfrac{(1-b)(a+1)+b-1}{a+1} \\ z=\dfrac{(1+b)(a+1)-(b-1)}{3(a+1)} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ y+z=\dfrac{(1-b)(a+1)-(1-b)}{a+1} \\ z=\dfrac{a+1+ab+b-b+1}{3(a+1)} \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ y+z=\dfrac{a(1-b)}{a+1} \\ \boxed{z=\dfrac{ab+a+2}{3(a+1)}} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+\left(\dfrac{ab+a+2}{3(a+1)}\right)=1 \\ y+\left(\dfrac{ab+a+2}{3(a+1)}\right)=\dfrac{a(1-b)}{a+1} \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y=1-\dfrac{ab+a+2}{3(a+1)} \\ y=\dfrac{a(1-b)}{a+1}-\dfrac{ab+a+2}{3(a+1)} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y=\dfrac{3(a+1)-(ab+a+2)}{3(a+1)} \\ y=\dfrac{3a(1-b)-(ab+a+2)}{3(a+1)} \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y=\dfrac{3a+3-ab-a-2}{3(a+1)} \\ y=\dfrac{3a-3ab-ab-a-2}{3(a+1)} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y=\dfrac{2a-ab+1}{3(a+1)} \\ \boxed{y=\dfrac{2(a-2ab-1)}{3(a+1)}} \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \quad x+\left(\frac{2(a-2ab-1)}{3(a+1)}\right)=\frac{2a-ab+1}{3(a+1)} \quad \Longrightarrow \quad x=\frac{2a-ab+1}{3(a+1)}-\frac{2(a-2ab-1)}{3(a+1)}$$

$$\Longrightarrow \quad x=\frac{2a-ab+1-2(a-2ab-1)}{3(a+1)} \quad \Longrightarrow \quad x=\frac{2a-ab+1-2a+4ab+2}{3(a+1)}$$

$$\Longrightarrow \quad x=\frac{3ab+3}{3(a+1)} \quad \Longrightarrow \quad x=\frac{3(ab+1)}{3(a+1)} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x=\frac{ab+1}{a+1}.}$$

Por lo tanto, el sistema es **consistente** y tiene una única solución para $a \neq -1$, la cual viene dada por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{ab+1}{a+1} \\ \dfrac{2(a-2ab-1)}{3(a+1)} \\ \dfrac{ab+a+2}{3(a+1)} \\ \dfrac{b-1}{a+1} \end{pmatrix}.$$

★

Ejemplo 47 *: Hallar el valor de la constante λ para que el sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} x+3y+z=2 \\ x+2y-5z=4 \\ 2x+5y-\lambda^2 z=\lambda+4 \end{cases}$$

(a) *Tenga solución única y hallar dicha solución.*

(b) *Tenga infinitas soluciones y hallar dichas soluciones.*

(c) *No tenga solución.*

Solución : Tenemos que las matrices del sistema son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & -\lambda^2 \end{pmatrix}, \qquad \overline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \overline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ \lambda+4 \end{pmatrix},$$

la matriz aumentada es

$$\left(A \mid \overline{b}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -5 & 4 \\ 2 & 5 & -\lambda^2 & \lambda+4 \end{array}\right).$$

Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada (que es equivalente a aplicar las operaciones elementales a la matriz de coeficientes) para transformar dicha matriz en una versión de su forma escalonada (método de eliminación gaussiana)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -5 & 4 \\ 2 & 5 & -\lambda^2 & \lambda+4 \end{array}\right) \xrightarrow[-2F_1+F_3 \to F_3]{-F_1+F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -6 & 2 \\ 0 & -1 & -2-\lambda^2 & \lambda \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & -1 & -2-\lambda^2 & \lambda \end{array}\right) \xrightarrow{F_2+F_3 \to F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 4-\lambda^2 & \lambda-2 \end{array}\right),$$

es decir, la matriz se puede escribir como

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & (2-\lambda)(2+\lambda) & \lambda-2 \end{array}\right).$$

Estudiamos los casos según los posibles valores de λ.

(a) Si $\lambda \neq 2$, tenemos que

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & (2-\lambda)(2+\lambda) & \lambda - 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2-\lambda}\ F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 2+\lambda & \dfrac{\lambda-2}{2-\lambda} \end{array}\right),$$

de aquí,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 2+\lambda & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{De la primera fila} : \ x+3y+z=2 \\ \text{De la segunda fila} : \ y+6z=-2 \\ \text{De la tercera fila} : \ (2+\lambda)\,z=-1. \end{array}\right. .$$

- Como $\lambda \neq -2$, entonces despejamos z de la ecuación dada por la tercera fila, se tiene

$$(2+\lambda)\,z=-1 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{z=-\frac{1}{2+\lambda}.}$$

- De la segunda fila, se tiene

$$y+6z=-2 \quad \Longrightarrow \quad y=-2-6\left(-\frac{1}{2+\lambda}\right) \quad \Longrightarrow \quad y=-2+\frac{6}{2+\lambda}$$

$$\Longrightarrow \quad y=\frac{-2\,(2+\lambda)+6}{2+\lambda} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{y=-\frac{2\,(\lambda-1)}{\lambda+2}.}$$

- De la primera fila, se tiene

$$x+3y+z=2 \quad \Longrightarrow \quad x=2-3\left(-\frac{2\,(\lambda-1)}{\lambda+2}\right)-\left(-\frac{1}{\lambda+2}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad x=2+\frac{6\,(\lambda-1)}{\lambda+2}+\frac{1}{\lambda+2} \quad \Longrightarrow \quad x=\frac{2\,(\lambda+2)+6\,(\lambda-1)+1}{\lambda+2}$$

$$\Longrightarrow \quad x=\frac{2\lambda+4+6\lambda-6+1}{\lambda+2} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x=\frac{8\lambda-1}{\lambda+2},}$$

por lo tanto, el sistema tiene una única solución, la cual viene dada por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{8\lambda-1}{\lambda+2} \\ -\dfrac{2\,(\lambda-1)}{\lambda+2} \\ -\dfrac{1}{\lambda+2} \end{pmatrix}.$$

(b) Si $\lambda = 2$, la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & (2-\lambda)(2+\lambda) & \lambda - 2 \end{array}\right)$$

queda

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & (2-(2))(2+(2)) & (2)-2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

de aquí, concluimos que el sistema tiene infinitas soluciones, hallamos dichas soluciones

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \implies \left\{ \begin{array}{l} \text{De la primera fila } : \ x+3y+z=2 \\ \text{De la segunda fila } : \ y+6z=-2. \end{array} \right. .$$

- De la segunda fila, se tiene

$$y+6z=-2 \implies \boxed{y=-2-6z.}$$

- De la tercera fila, se tiene

$$x+3y+z=2 \implies x=2-3(-2-6z)-z \implies \boxed{x=17z+8.}$$

Así, las infinitas soluciones son

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17z+8 \\ -6z-2 \\ z \end{pmatrix}, \qquad \text{con} \quad z \in \mathbb{R}.$$

(c) Si $\lambda=-2$, obtenemos la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & (2-(-2))(2+(-2)) & (-2)-2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right),$$

de la tercera fila se tiene

$$0x+0y+0z=-4 \implies 0=-4,$$

lo cual es una contradicción, por lo que concluimos que el sistema no tiene solución.

★

Ejemplo 48 : *Hallar el valor de las constantes a y b para que el sistema de ecuaciones*

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x-4y+7z=b-11 \\ x-y+2z=-3 \\ 2x-y+3z=-4 \\ -x+3y+(a-4)z=b+7 \end{array} \right.$$

(i). *Tenga solución única y hallar dicha solución.*

(ii). *Tenga infinitas soluciones y hallar dichas soluciones.*

(iii). *No tenga solución.*

Solución : Tenemos que las matrices del sistema son

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 7 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & a-4 \end{pmatrix}, \qquad \overline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \overline{b} = \begin{pmatrix} b-11 \\ -3 \\ -4 \\ b+7 \end{pmatrix}$$

la matriz aumentada es

$$\left(A \mid \overline{b}\right) = \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -4 & 7 & b-11 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & -4 \\ -1 & 3 & a-4 & b+7 \end{array}\right).$$

Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada (que es equivalente a aplicar las operaciones elementales a la matriz de coeficientes) para transformar dicha matriz en una versión de su forma escalonada (método de eliminación gaussiana)

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -4 & 7 & b-11 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & -4 \\ -1 & 3 & a-4 & b+7 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \longleftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 7 & b-11 \\ 2 & -1 & 3 & -4 \\ -1 & 3 & a-4 & b+7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1+F_4 \to F_4]{\substack{-3F_1+F_2 \to F_2 \\ -2F_1+F_3 \to F_3}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & b-2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & a-2 & b+4 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2-b \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & a-2 & b+4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{-F_2+F_3 \to F_3 \\ -2F_2+F_4 \to F_4}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2-b \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & a & 3b \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2-b \\ 0 & 0 & a & 3b \\ 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right).$$

Estudiamos los casos según los posibles valores de a y b.

(i) Si $b=0$ y $a \neq 0$, tenemos

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2-(0) \\ 0 & 0 & a & 3\,(0) \\ 0 & 0 & 0 & (0) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

entonces, el sistema tiene una única solución, la cual viene dada por

- De la fila 3, se tiene

$$az = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{z = 0.}$$

- De la fila 2, se tiene

$$y - z = 2 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{y = 2.}$$

- De la fila 1, se tiene

$$x - y + 2z = -3 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{x = -1.}$$

Así, la única solución es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) Si $b = 0$ y $a = 0$, tenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2-(0) \\ 0 & 0 & (0) & 3\,(0) \\ 0 & 0 & 0 & (0) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

entonces, el sistema tiene infinitas soluciones, las cuales vienen dada por

- De la fila 2, se tiene:

$$y - z = 2 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{y = 2 + z.}$$

- De la fila 1, se tiene:

$$x - y + 2z = -3 \qquad \Longrightarrow \qquad x = -3 + (2+z) - 2z \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{x = -z - 1.}$$

Así, las infinitas soluciones son

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z-1 \\ z+2 \\ z \end{pmatrix}, \qquad \text{con} \quad z \in \mathbb{R}.$$

(iii) Si $b \neq 0$, tenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2-b \\ 0 & 0 & a & 3b \\ 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right),$$

entonces, de la fila 4 se tiene

$$0x + 0y + 0z = b \qquad \Longrightarrow \qquad 0 = b,$$

lo cual es una contradicción, por lo que el sistema no tiene solución. ★

Ejemplo 49 : *Hallar un matriz B, si existe, de tamaño 2×2, tal que $AB = I$, donde*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución : Sean

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \qquad\qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

así,

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b_{11} - b_{21} & 2b_{12} - b_{22} \\ b_{11} + b_{21} & b_{12} + b_{22} \end{pmatrix},$$

entonces

$$AB = I \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 2b_{11} - b_{21} & 2b_{12} - b_{22} \\ b_{11} + b_{21} & b_{12} + b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de aquí, se tiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2b_{11} - b_{21} = 1 \\ 2b_{12} - b_{22} = 0 \\ b_{11} + b_{21} = 0 \\ b_{12} + b_{22} = 1 \end{cases}$$

de donde se generan dos nuevos sistemas

$$\begin{cases} 2b_{11} - b_{21} = 1 \\ b_{11} + b_{21} = 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} 2b_{12} - b_{22} = 0 \\ b_{12} + b_{22} = 1 \end{cases},$$

cuya representación matricial viene dada por

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad \text{y} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

Aplicamos operaciones elementales sobre las filas a cada matriz aumentada para transformar dicha matriz en una versión de su forma escalonada reducida (método de Gauss-Jordan), observemos que ambas matrices aumentadas varía solo sobre el vector recurso, así, aplicamos las operaciones elementales sobre las filas de la siguiente matriz

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

entonces

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \longleftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-2F_1 + F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{3}F_1 \to F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{-F_2 + F_1 \to F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right),$$

de aquí, el sistema

$$\begin{cases} 2b_{11} - b_{21} = 1 \\ b_{11} + b_{21} = 0 \end{cases} \qquad \text{con matriz aumentada dada por} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

tiene matriz aumentada equivalente a

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} \text{De la primera fila} \ : \ b_{11} + 0b_{21} = \dfrac{1}{3} \\ \text{De la segunda fila} \ : \ 0b_{11} + b_{21} = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \boxed{b_{11} = \dfrac{1}{3}.} \\ \boxed{b_{21} = -\dfrac{1}{3}.} \end{cases},$$

por otro lado, el sistema

$$\begin{cases} 2b_{12} - b_{22} = 0 \\ b_{12} + b_{22} = 1 \end{cases} \qquad \text{con matriz aumentada dada por} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

tiene matriz aumentada equivalente a

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} \text{De la primera fila} \ : \ b_{12} + 0b_{22} = \dfrac{1}{3} \\ \text{De la segunda fila} \ : \ 0b_{12} + b_{22} = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \boxed{b_{12} = \dfrac{1}{3}.} \\ \boxed{b_{22} = \dfrac{2}{3}.} \end{cases}.$$

Luego, la matriz B viene dada por

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

★

Ejemplo 50 : *Hallar un matriz B, si existe, de tamaño 3×3, tal que $AB = BA = I$, donde*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución : Sean

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

así,

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} - b_{21} + b_{31} & b_{12} - b_{22} + b_{32} & b_{13} - b_{23} + b_{33} \\ 2b_{11} + b_{21} - b_{31} & 2b_{12} + b_{22} - b_{32} & 2b_{13} + b_{23} - b_{33} \\ b_{11} + b_{21} + b_{31} & b_{12} + b_{22} + b_{32} & b_{13} + b_{23} + b_{33} \end{pmatrix},$$

entonces

$$AB = I \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} b_{11} - b_{21} + b_{31} & b_{12} - b_{22} + b_{32} & b_{13} - b_{23} + b_{33} \\ 2b_{11} + b_{21} - b_{31} & 2b_{12} + b_{22} - b_{32} & 2b_{13} + b_{23} - b_{33} \\ b_{11} + b_{21} + b_{31} & b_{12} + b_{22} + b_{32} & b_{13} + b_{23} + b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de aquí, se tiene los sistemas de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{r} b_{11} - b_{21} + b_{31} = 1 \\ 2b_{11} + b_{21} - b_{31} = 0 \\ b_{11} + b_{21} + b_{31} = 0 \end{array} \right., \qquad \left\{ \begin{array}{r} b_{12} - b_{22} + b_{32} = 0 \\ 2b_{12} + b_{22} - b_{32} = 1 \\ b_{12} + b_{22} + b_{32} = 0 \end{array} \right. \qquad \text{y} \qquad \left\{ \begin{array}{r} b_{13} - b_{23} + b_{33} = 0 \\ 2b_{13} + b_{23} - b_{33} = 0 \\ b_{13} + b_{23} + b_{33} = 1 \end{array} \right.$$

cuya representación matricial viene dada por

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right), \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \qquad \text{y} \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Aplicamos operaciones elementales sobre las filas a cada matriz aumentada para transformar dicha matriz en una versión de su forma escalonada reducida (método de Gauss-Jordan), observemos que las tres matrices aumentadas varían solo sobre el vector recurso, así, aplicamos las operaciones elementales sobre las filas de la siguiente matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

entonces

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-F_1+F_3 \to F_3]{-2F_1+F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_2+F_1 \to F_1]{-2F_2+F_3 \to F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dfrac{1}{3} & -\dfrac{2}{3} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_3+F_2 \to F_2]{\frac{1}{2}F_3 \to F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\dfrac{1}{2} & 0 & \dfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{1}{6} & -\dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{2} \end{array}\right),$$

de aquí, el sistema

$$\begin{cases} b_{11} - b_{21} + b_{31} = 1 \\ 2b_{11} + b_{21} - b_{31} = 0 \\ b_{11} + b_{21} + b_{31} = 0 \end{cases} \qquad \text{con matriz aumentada dada por} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

tiene matriz aumentada equivalente a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \dfrac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{1}{6} \end{array}\right) \implies \begin{cases} \text{De la primera fila } : \; b_{11} + 0b_{21} + 0b_{31} = \dfrac{1}{3} \\ \text{De la segunda fila } : \; 0b_{11} + b_{21} + 0b_{31} = -\dfrac{1}{2} \\ \text{De la tercera fila } : \; 0b_{11} + 0b_{21} + b_{31} = \dfrac{1}{6} \end{cases},$$

es decir,

$$\boxed{b_{11} = \frac{1}{3},} \qquad \boxed{b_{21} = -\frac{1}{2}} \qquad \text{y} \qquad \boxed{b_{31} = \frac{1}{6}.}$$

Por otra parte, el sistema

$$\begin{cases} b_{12}-b_{22}+b_{32}=0 \\ 2b_{12}+b_{22}-b_{32}=1 \\ b_{12}+b_{22}+b_{32}=0 \end{cases} \qquad \text{con matriz aumentada dada por} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

tiene matriz aumentada equivalente a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} \text{De la primera fila} \;:\; b_{12}+0b_{22}+0b_{32}=\frac{1}{3} \\ \text{De la segunda fila} \;:\; 0b_{12}+b_{22}+0b_{32}=0 \\ \text{De la tercera fila} \;:\; 0b_{12}+0b_{22}+b_{32}=-\frac{1}{3} \end{cases},$$

es decir,

$$\boxed{b_{12}=\frac{1}{3},} \qquad \boxed{b_{22}=0} \qquad \text{y} \qquad \boxed{b_{32}=-\frac{1}{3}.}$$

Por último, el sistema

$$\begin{cases} b_{13}-b_{23}+b_{33}=0 \\ 2b_{13}+b_{23}-b_{33}=0 \\ b_{13}+b_{23}+b_{33}=1 \end{cases} \qquad \text{con matriz aumentada dada por} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

tiene matriz aumentada equivalente a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} \text{De la primera fila} \;:\; b_{13}+10b_{23}+0b_{33}=0 \\ \text{De la segunda fila} \;:\; 0b_{13}+b_{23}+0b_{33}=\frac{1}{2} \\ \text{De la tercera fila} \;:\; 0b_{13}+0b_{23}+b_{33}=\frac{1}{2} \end{cases},$$

es decir,

$$\boxed{b_{13}=0,} \qquad \boxed{b_{23}=\frac{1}{2}} \qquad \text{y} \qquad \boxed{b_{33}=-\frac{1}{2}.}$$

Luego, la matriz B viene dada por

$$B=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

verificamos que $BA=I$

$$BA=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3}+\frac{2}{3}+0 & -\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+0 & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}+0 \\ -\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+0+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{6}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2} & \frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} \dfrac{1+2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1+1}{2} & 0 \\ \dfrac{1-4+3}{6} & \dfrac{-1-2+3}{6} & \dfrac{1+2+3}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

★

Ejemplo 51 : *Hallar una matriz B, si existe, de tamaño 3×2, tal que $AB = I$, donde*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solución : Sean

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

así,

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2b_{11} - b_{21} + b_{31} & -2b_{12} - b_{22} + b_{32} \\ b_{11} + 2b_{31} & b_{12} + 2b_{32} \end{pmatrix},$$

entonces

$$AB = I \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} -2b_{11} - b_{21} + b_{31} & -2b_{12} - b_{22} + b_{32} \\ b_{11} + 2b_{31} & b_{12} + 2b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de aquí, se tiene los sistemas de ecuaciones

$$\begin{cases} -2b_{11} - b_{21} + \ \ b_{31} = 1 \\ \quad b_{11} \qquad + 2b_{31} = 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} -2b_{12} - b_{22} + \ \ b_{32} = 0 \\ \quad b_{12} \qquad + 2b_{32} = 1 \end{cases}$$

cuya representación matricial viene dada por

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \qquad \text{y} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Aplicamos operaciones elementales sobre las filas a cada matriz aumentada para transformar dicha matriz en una versión de su forma escalonada reducida (método de Gauss-Jordan), observemos que ambas matrices aumentadas varían solo sobre el vector recurso, así, aplicamos las operaciones elementales sobre las filas de la siguiente matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} -2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

entonces

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} -2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \longleftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{2F_1 + F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & -2 \end{array}\right),$$

de aquí, el sistema

$$\begin{cases} -2b_{11} - b_{21} + \ \ b_{31} = 1 \\ \quad b_{11} \qquad + 2b_{31} = 0 \end{cases} \qquad \text{con matriz aumentada dada por} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right),$$

tiene matriz aumentada equivalente a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -1 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \text{De la primera fila } : \ b_{11}+0b_{21}+2b_{31}=0 \\ \text{De la segunda fila } : \ 0b_{11}+b_{21}-5b_{31}=-1 \end{array}\right.,$$

es decir,

$$\boxed{b_{11}=-2b_{31}} \qquad \text{y} \qquad \boxed{b_{21}=5b_{31}-1,}$$

por otro lado, el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} -2b_{12}-b_{22}+\ b_{32}=0 \\ \quad b_{12} \qquad +2b_{32}=1 \end{array}\right. \qquad \text{con matriz aumentada dada por} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right),$$

tiene matriz aumentada equivalente a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \text{De la primera fila } : \ b_{12}+0b_{22}+2b_{32}=1 \\ \text{De la segunda fila } : \ 0b_{12}+b_{22}-5b_{32}=-2 \end{array}\right.,$$

es decir,

$$\boxed{b_{12}=1-2b_{32}} \qquad \text{y} \qquad \boxed{b_{22}=5b_{32}-2.}$$

Luego, existen infinitas matrices B, tales que $AB=I$, dichas matrices vienen dadas por

$$B=\begin{pmatrix} -2b_{31} & 1-2b_{32} \\ 5b_{31}-1 & 5b_{32}-2 \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix},$$

con $b_{31}, b_{32} \in \mathbb{R}$. ★

Ejemplo 52 *: Hallar una matriz B, si existe, de tamaño 3×3, tal que $AB=I$, donde*

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solución : Sean

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \qquad I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

así,

$$AB=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2b_{11}+b_{21}-2b_{31} & 2b_{12}+b_{22}-2b_{32} & 2b_{13}+b_{23}-2b_{33} \\ 3b_{21}-b_{31} & 3b_{22}-b_{32} & 3b_{23}-b_{33} \\ 2b_{11}-2b_{21}-b_{31} & 2b_{12}-2b_{22}-b_{32} & 2b_{13}-2b_{23}-b_{33} \end{pmatrix},$$

entonces

$$AB = I \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2b_{11}+b_{21}-2b_{31} & 2b_{12}+b_{22}-2b_{32} & 2b_{13}+b_{23}-2b_{33} \\ 3b_{21}-b_{31} & 3b_{22}-b_{32} & 3b_{23}-b_{33} \\ 2b_{11}-2b_{21}-b_{31} & 2b_{12}-2b_{22}-b_{32} & 2b_{13}-2b_{23}-b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de aquí, se tiene los sistemas de ecuaciones

$$\begin{cases} 2b_{11}+\ b_{21}-2b_{31}=1 \\ \qquad 3b_{21}-\ b_{31}=0 \\ 2b_{11}-2b_{21}-\ b_{31}=0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} 2b_{12}+\ b_{22}-2b_{32}=0 \\ \qquad 3b_{22}-\ b_{32}=1 \\ 2b_{12}-2b_{22}-\ b_{32}=0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} 2b_{13}+\ b_{23}-2b_{33}=0 \\ \qquad 3b_{23}-\ b_{33}=0 \\ 2b_{13}-2b_{23}-\ b_{33}=1 \end{cases}$$

cuya representación matricial viene dada por

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right), \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \qquad \text{y} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Aplicamos operaciones elementales sobre las filas a cada matriz aumentada para transformar dicha matriz en una versión de su forma escalonada reducida (método de Gauss-Jordan), observemos que las tres matrices aumentadas varían solo sobre el vector recurso, así, aplicamos las operaciones elementales sobre las filas de la siguiente matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

entonces

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-2F_1+F_3\to F_3]{\frac{1}{2}F_1\to F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}F_2\to F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{2}F_2+F_1\to F_1]{3F_2+F_3\to F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{5}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

de aquí, el sistema

$$\begin{cases} 2b_{11}+\ b_{21}-2b_{31}=1 \\ \qquad 3b_{21}-\ b_{31}=0 \\ 2b_{11}-2b_{21}-\ b_{31}=0 \end{cases} \qquad \text{con matriz aumentada dada por} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right),$$

tiene matriz aumentada equivalente a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\dfrac{5}{6} & \dfrac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\dfrac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \implies \left\{\begin{array}{l} \text{De la primera fila} \ : \ b_{11} + 0b_{21} - \dfrac{5}{6}\, b_{31} = \dfrac{1}{2} \\ \text{De la segunda fila} \ : \ 0b_{11} + b_{21} - \dfrac{1}{3}\, b_{31} = 0 \\ \text{De la tercera fila} \ : \ 0b_{11} + 0b_{21} + 0b_{31} = -1 \end{array}\right. ,$$

de la tercera fila se tiene que $0 = -1$ lo cual es una contradicción, por lo que concluimos que el sistema no tiene solución, por lo tanto, **NO** existe una matriz B, tal que $AB = I$. ★

Ejemplo 53 *: Hallar los valores de las constantes* c_1, c_2, c_3 *y* c_4, *tales que*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución : Por las operaciones definidas entre matrices se tiene que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= c_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 & c_1 \\ -c_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2c_2 \\ c_2 & -c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3c_3 & c_3 \\ 0 & 2c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2c_4 & -c_4 \\ c_4 & 3c_4 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} c_1 - 3c_3 - 2c_4 & c_1 + 2c_2 + c_3 - c_4 \\ -c_1 + c_2 + c_4 & -c_2 + 2c_3 + 3c_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - 3c_3 - 2c_4 & c_1 + 2c_2 + c_3 - c_4 \\ -c_1 + c_2 + c_4 & -c_2 + 2c_3 + 3c_4 \end{pmatrix},$$

de aquí, se genera el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} c_1 \qquad\quad - 3c_3 - 2c_4 &=& a \\ c_1 + 2c_2 + \ c_3 - \ c_4 &=& b \\ -c_1 + \ c_2 \qquad + \ c_4 &=& c \\ - \ c_2 + 2c_3 + 3c_4 &=& d \end{array}\right. , \qquad \text{con representación matricial} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & -2 & a \\ 1 & 2 & 1 & -1 & b \\ -1 & 1 & 0 & 1 & c \\ 0 & -1 & 2 & 3 & d \end{array}\right).$$

Aplicamos operaciones elementales sobre las filas a cada matriz aumentada para transformar dicha matriz en una versión de su forma escalonada reducida (método de Gauss-Jordan)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & -2 & a \\ 1 & 2 & 1 & -1 & b \\ -1 & 1 & 0 & 1 & c \\ 0 & -1 & 2 & 3 & d \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 + F_3 \to F_3]{-F_1 + F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & -2 & a \\ 0 & 2 & 4 & 1 & b-a \\ 0 & 1 & -3 & -1 & a+c \\ 0 & -1 & 2 & 3 & d \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2 \longleftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & -2 & a \\ 0 & 1 & -3 & -1 & a+c \\ 0 & 2 & 4 & 1 & b-a \\ 0 & -1 & 2 & 3 & d \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & -2 & a \\ 0 & 1 & -3 & -1 & a+c \\ 0 & 2 & 4 & 1 & b-a \\ 0 & -1 & 2 & 3 & d \end{array}\right) \xrightarrow[]{\substack{-2F_2+F_3\to F_3 \\ F_2+F_4\to F_4}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & -2 & a \\ 0 & 1 & -3 & -1 & a+c \\ 0 & 0 & 10 & 3 & b-3a-2c \\ 0 & 0 & -1 & 2 & a+c+d \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[]{\substack{F_3\longleftrightarrow F_4 \\ -F_4\to F_4}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & -2 & a \\ 0 & 1 & -3 & -1 & a+c \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -a-c-d \\ 0 & 0 & 10 & 3 & b-3a-2c \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[3F_3+F_1\to F_1]{\substack{-10F_3+F_4\to F_4 \\ 3F_3+F_2\to F_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -8 & -2a-3c-3d \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -2a-2c-3d \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -a-c-d \\ 0 & 0 & 0 & 23 & b+7a+8c+10d \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[]{\frac{1}{23}F_4\to F_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -8 & -2a-3c-3d \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -2a-2c-3d \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -a-c-d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dfrac{b+7a+8c+10d}{23} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[8F_4+F_1\to F_1]{\substack{2F_4+F_3\to F_3 \\ 7F_4+F_2\to F_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{10a+8b-5c+11d}{23} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dfrac{3a+7b+10c+d}{23} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dfrac{2b-9a-7c-3d}{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dfrac{b+7a+8c+10d}{23} \end{array}\right),$$

con lo que

$$\boxed{c_1 = \frac{10a+8b-5c+11d}{23},} \qquad \boxed{c_2 = \frac{3a+7b+10c+d}{23},}$$

$$\boxed{c_3 = \frac{2b-9a-7c-3d}{23},} \qquad \boxed{c_4 = \frac{b+7a+8c+10d}{23}.}$$

★

Ejercicios

1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales usando uno de los siguientes métodos : reducción, igualación o sustitución

1. $\begin{cases} 2x+3y=4 \\ -3x+\ y=5 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x-2y=0 \\ -x+\ y=3 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 5x-2y=4 \\ x+4y=1 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 4x-6y=1 \\ x-2y=1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} \sqrt{8}x+\sqrt{2}y=2 \\ 2x+\sqrt{8}y=0 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} y-5=0 \\ y=-4x-3 \end{cases}$ 7. $\begin{cases} x+y=7 \\ 2x+2y=14 \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 4x-5y=8 \\ 2x+y=-10 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x-4y=5 \\ 2x+3y=9 \end{cases}$ 10. $\begin{cases} 5x-2y=5 \\ 2x+3y=6 \end{cases}$ 11. $\begin{cases} x-4y=5 \\ 3x-12y=0 \end{cases}$ 12. $\begin{cases} 2x+5y=19 \\ 2y-7x=-8 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 5y-2x=17 \\ x+3y=8 \end{cases}$ 14. $\begin{cases} 3y-7x=41 \\ 5x+y=5 \end{cases}$ 15. $\begin{cases} 3x+2y=-5 \\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=7 \end{cases}$ 16. $\begin{cases} -x-4y=0 \\ 7x+2y=0 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 6x=5y+6 \\ 26x+15y=4 \end{cases}$ 18. $\begin{cases} x-3y=-5 \\ 3x-y=5 \end{cases}$ 19. $\begin{cases} 4x-2y=0 \\ 3x-y=3 \end{cases}$ 20. $\begin{cases} x-\frac{1}{2}y=0 \\ \frac{3}{2}x-4y=0 \end{cases}$

21. $\begin{cases} 5x_1+x_2=0 \\ 3x_1-2x_2=4 \end{cases}$ 22. $\begin{cases} x+y=7 \\ 2x+2y=10 \end{cases}$ 23. $\begin{cases} 5x_1+x_2+x_3=-1 \\ 4x_1-7x_2-x_3=2 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 5x-2y+7z=-2 \\ x+6y-3z=8 \\ 4y-2x+z=-10 \end{cases}$ 25. $\begin{cases} 3x+2y-z=10 \\ x+y+4z=-1 \\ 6x-2y+7z=11 \end{cases}$ 26. $\begin{cases} -4x_1+2x_2+4x_3=1 \\ 6x_1-2x_2-5x_3=0 \\ -6x_1+4x_2+7x_3=3 \end{cases}$

2. Escribir la matriz asociada a los sistemas de ecuaciones lineales del ejercicio 1.

3. Escribir la forma matricial del sistema, $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$, para los sistemas de ecuaciones lineales del ejercicio 1, especificando A, $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{b}$.

4. ¿Es $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ una solución del siguiente sistema?

$$\begin{cases} 5x_1-x_2+2x_3=7 \\ -2x_1+6x_2+9x_3=0 \\ -7x_1+5x_2-3x_3=-7 \end{cases}$$

5. ¿Es $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{7} \\ \frac{27}{7} \\ -\frac{16}{7} \end{pmatrix}$ una solución del siguiente sistema?

$$\begin{cases} 2x_1 \qquad -x_3=2 \\ 2x_1+x_2+2x_3=-1 \\ -x_1+x_2 \qquad =4 \end{cases}$$

6. ¿Es $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ una solución del siguiente sistema?

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = -13 \\ x_1 + 2x_2 = -3 \\ -2x_1 + 4x_2 = 14 \end{cases}$$

7. ¿Es $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ una solución del siguiente sistema?

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 45 \\ -2x_1 + 4x_2 = 8 \end{cases}$$

8. Considere el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_4 = -2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 18 \end{cases}$ ¿Es el vector $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ solución del sistema?

9. Considere el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = -2 \\ 3x_1 + 4x_2 = 4 \end{cases}$
   (a) Escribir la matriz asociada al sistema.
   (b) Escribir la forma matricial del sistema, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, especificando A, $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{b}$.
   (c) Escribir la matriz aumentada del sistema.
   (d) Utilice el método de eliminación de Gauss para obtener las soluciones del sistema, si es que existen.

10. Encuentre el punto $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ que pertenece tanto a la recta $x_1 + 5x_2 = 7$ como a la recta $x_1 - 2x_2 = -2$.

11. Encuentre el punto de intersección de las rectas $x_1 - 5x_2 = 1$ y $3x_1 - 7x_2 = 5$.

12. Encuentre el punto de intersección de las rectas $x + 2y = -1$ y $4x + 8y = 0$.

13. Encuentre el punto de intersección de las rectas $x_1 - x_2 - 1 = 0$ y $x_1 + 4x_2 = -3$.

14. ¿Las tres rectas $x_1 - 4x_2 = 1$, $2x_1 - x_2 = -3$ y $-x_1 - 3x_2 = 4$ tienen un punto de intersección común?

15. Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

   (a) Escribir la matriz asociada al sistema.
   (b) Escribir la forma matricial del sistema, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, especificando A, $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{b}$.
   (c) Escribir la matriz aumentada del sistema.
   (d) Utilice el método de eliminación de Gauss para obtener las soluciones del sistema, si es que existen.

16. Considere el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases}$$
   (a) Escribir la matriz asociada al sistema.
   (b) Escribir la forma matricial del sistema, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, especificando A, $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{b}$.
   (c) Escribir la matriz aumentada del sistema.
   (d) Utilice el método de eliminación de Gauss para obtener las soluciones del sistema, si es que existen.
17. Considere el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ 6x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ -6x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 3 \end{cases}$$
   (a) Escribir la matriz asociada al sistema.
   (b) Escribir la forma matricial del sistema, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, especificando A, $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{b}$.
   (c) Escribir la matriz aumentada del sistema.
   (d) Utilice el método de eliminación de Gauss para obtener las soluciones del sistema, si es que existen.
18. Considere el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 1 \\ 7x_2 - 2x_3 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$
   (a) Escribir la matriz asociada al sistema.
   (b) Escribir la forma matricial del sistema, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, especificando A, $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{b}$.
   (c) Escribir la matriz aumentada del sistema.
   (d) Utilice el método de eliminación de Gauss para obtener las soluciones del sistema, si es que existen.
19. Considere el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 13 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = -2 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = -5 \end{cases}$$
   (a) Escribir la matriz asociada al sistema.
   (b) Escribir la forma matricial del sistema, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, especificando A, $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{b}$.
   (c) Escribir la matriz aumentada del sistema.
   (d) Utilice el método de eliminación de Gauss para obtener las soluciones del sistema, si es que existen.
20. Considere el sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 5 \end{cases}$$
   (a) Escribir la matriz asociada al sistema.
   (b) Escribir la forma matricial del sistema, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, especificando A, $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{b}$.
   (c) Escribir la matriz aumentada del sistema.
   (d) Utilice el método de eliminación de Gauss para obtener las soluciones del sistema, si es que existen.

21. Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 5 \end{cases}$$

(a) Escribir la matriz asociada al sistema.
(b) Escribir la forma matricial del sistema, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, especificando A, $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{b}$.
(c) Escribir la matriz aumentada del sistema.
(d) Utilice el método de eliminación de Gauss para obtener las soluciones del sistema, si es que existen.

22. Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

(a) Escribir la matriz asociada al sistema.
(b) Escribir la forma matricial del sistema, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, especificando A, $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{b}$.
(c) Escribir la matriz aumentada del sistema.
(d) Utilice el método de eliminación de Gauss para obtener las soluciones del sistema, si es que existen.

23. Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 15x_1 + 10x_2 - 5x_3 = -4 \\ 25x_1 - 15x_2 - 21x_3 = -13 \\ -10x_1 + 25x_2 + 16x_3 = 9 \end{cases}$$

(a) Escribir la matriz asociada al sistema.
(b) Escribir la forma matricial del sistema, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, especificando A, $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{b}$.
(c) Escribir la matriz aumentada del sistema.
(d) Utilice el método de eliminación de Gauss para obtener las soluciones del sistema, si es que existen.

24. Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 2 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_1 + 6x_2 - 11x_3 = 4 \end{cases}$$

(a) Escribir la matriz asociada al sistema.
(b) Escribir la forma matricial del sistema, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, especificando A, $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{b}$.
(c) Escribir la matriz aumentada del sistema.
(d) Utilice el método de eliminación de Gauss para obtener las soluciones del sistema, si es que existen.

25. Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -4 \\ 14x_2 - 2x_3 = -15 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

(a) Escribir la matriz asociada al sistema.
(b) Escribir la forma matricial del sistema, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, especificando A, $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{b}$.

(c) Escribir la matriz aumentada del sistema.
(d) Utilice el método de eliminación de Gauss para obtener las soluciones del sistema, si es que existen.

26. Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 3x_1 + 5x_3 - 2x_4 = 6 \\ -2x_1 - x_2 + 6x_4 = -7 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4 \end{cases}$$

(a) Escribir la matriz asociada al sistema.
(b) Escribir la forma matricial del sistema, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, especificando A, $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{b}$.
(c) Escribir la matriz aumentada del sistema.
(d) Utilice el método de eliminación de Gauss para obtener las soluciones del sistema, si es que existen.

27. Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 8x_4 = 8 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = -4 \\ -x_1 - 3x_2 + 18x_3 - 12x_4 = 12 \\ x_1 - 3x_3 = 0 \\ x_2 - 5x_3 + 4x_4 = -4 \end{cases}$$

(a) Escribir la matriz asociada al sistema.
(b) Escribir la forma matricial del sistema, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, especificando A, $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{b}$.
(c) Escribir la matriz aumentada del sistema.
(d) Utilice el método de eliminación de Gauss para obtener las soluciones del sistema, si es que existen.

28. Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3 \\ 3x_1 + 5x_3 - 2x_4 = -2 \\ -2x_1 - x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 8 \end{cases}$$

(a) Escribir la matriz asociada al sistema.
(b) Escribir la forma matricial del sistema, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, especificando A, $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{b}$.
(c) Escribir la matriz aumentada del sistema.
(d) Utilice el método de eliminación de Gauss para obtener las soluciones del sistema, si es que existen.

29. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones aplicando el método de eliminación de Gauss

1. $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ -3x + y = 5 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ -x + y = 3 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ x + 4y = 1 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 4x - 6y = 1 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} \sqrt{8}x + \sqrt{2}y = 2 \\ 2x + \sqrt{8}y = 0 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} y - 5 = 0 \\ y = -4x - 3 \end{cases}$ 7. $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 2y = 14 \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 4x - 5y = 8 \\ 2x + y = -10 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x - 4y = 5 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases}$ 10. $\begin{cases} 5x - 2y = 5 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$ 11. $\begin{cases} x - 4y = 5 \\ 3x - 12y = 0 \end{cases}$ 12. $\begin{cases} 2x + 5y = 19 \\ 2y - 7x = -8 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 5y-2x=17 \\ x+3y=\ 8 \end{cases}$ 14. $\begin{cases} 3y-7x=41 \\ 5x+\ y=\ 5 \end{cases}$ 15. $\begin{cases} 3x+\ 2y=-5 \\ \dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{3}y=\ 7 \end{cases}$ 16. $\begin{cases} -x-4y=0 \\ 7x+2y=0 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 6x=\ 5y+6 \\ 26x+15y=4 \end{cases}$ 18. $\begin{cases} x-3y=-5 \\ 3x-\ y=\ 5 \end{cases}$ 19. $\begin{cases} 4x-2y=0 \\ 3x-\ y=3 \end{cases}$ 20. $\begin{cases} x-\dfrac{1}{2}\,y=0 \\ \dfrac{3}{2}\,x-\ 4y=0 \end{cases}$

21. $\begin{cases} 5x_1+\ x_2=0 \\ 3x_1-2x_2=4 \end{cases}$ 22. $\begin{cases} x+\ y=\ 7 \\ 2x+2y=10 \end{cases}$ 23. $\begin{cases} 5x_1+\ x_2+x_3=-1 \\ 4x_1-7x_2-x_3=\ 2 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 5x-2y+7z=\ -2 \\ x+6y-3z=\ 8 \\ 4y-2x+\ z=-10 \end{cases}$ 25. $\begin{cases} 3x+2y-\ z=\ 10 \\ x+\ y+4z=-1 \\ 6x-2y+7z=\ 11 \end{cases}$ 26. $\begin{cases} -4x_1+2x_2+4x_3=1 \\ 6x_1-2x_2-5x_3=0 \\ -6x_1+4x_2+7x_3=3 \end{cases}$

27. $\begin{cases} 5x_1+4x_2-2x_3=0 \\ x_1-3x_2+4x_3=0 \\ 6x_1+2x_2+7x_3=0 \end{cases}$ 28. $\begin{cases} x-3y+\ z=\ 13 \\ 4x+2y+\ z=-2 \\ 3x-\ y-2z=-5 \end{cases}$ 29. $\begin{cases} 15x+10y-\ 5z=\ -4 \\ 25x-15y-21z=-13 \\ -10x+25y+16z=\ 9 \end{cases}$

30. $\begin{cases} 3x_1-2x_2+5x_3=0 \\ -x_1+4x_2-2x_3=1 \\ 2x_1-5x_2+\ x_3=0 \end{cases}$ 31. $\begin{cases} 3x+4y-\ 6z=2 \\ 4x+2y-\ z=6 \\ 2x+6y-11z=4 \end{cases}$ 32. $\begin{cases} 2x-\ y+\ z=\ 3 \\ x+2y+2z=-5 \\ x-\ y+3z=\ 0 \end{cases}$

33. $\begin{cases} 4x+y+5z=0 \\ -2x+y-\ z=3 \\ x+y+\ z=4 \end{cases}$ 34. $\begin{cases} 2x_1-\ x_2+2x_3 \qquad =-3 \\ 3x_2+6x_3-2x_4=\ 1 \\ -2x_1+2x_2 \qquad -\ x_4=-2 \end{cases}$

35. $\begin{cases} x_1+\ x_2+\ x_3+\ x_4=\ 4 \\ 3x_1 \qquad +5x_3-2x_4=\ 6 \\ -2x_1-\ x_2 \qquad +6x_4=-7 \\ 4x_1+2x_2-3x_3 \qquad =-4 \end{cases}$

30. Hallar las soluciones de los siguientes sistemas homogéneo

a. $\begin{cases} x+\ y+\ z=0 \\ x+2y-3z=0 \end{cases}$ *b.* $\begin{cases} x+3y-5z+\ w=0 \\ 2x+5y-2z+6w=0 \end{cases}$ *c.* $\begin{cases} 5x_1+4x_2-2x_3=0 \\ x_1-3x_2+4x_3=0 \\ 6x_1+2x_2+7x_3=0 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x_1-4x_2+\ x_3=0 \\ 7x_1-3x_2+\ x_3=0 \\ x_1+2x_2-5x_3=0 \end{cases}$ *e.* $\begin{cases} 5x_1+4x_2-2x_3=0 \\ x_1-3x_2+4x_3=0 \\ 6x_1+2x_2+7x_3=0 \end{cases}$ *f.* $\begin{cases} 3x_1-2x_2+5x_3=0 \\ -x_1+4x_2-2x_3=0 \\ 2x_1-5x_2+\ x_3=0 \end{cases}$

$$g.\quad \begin{cases} 4x_1-2x_2+5x_3-x_4=0\\ 3x_1+4x_2-2x_3+2x_4=0\\ 3x_1+4x_3-5x_4=0\\ 4x_1-6x_2+7x_3-8x_4=0\end{cases} \qquad h.\quad \begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0\\ 3x_1+5x_3-2x_4=0\\ -2x_1-x_2+6x_4=0\\ 2x_1+6x_3+5x_4=0\end{cases}$$

$$i.\quad \begin{cases} 2x_1-3x_2+4x_3-x_4=0\\ 6x_1+x_2-7x_3=0\\ -x_1+2x_3+5x_4=0\end{cases} \qquad j.\quad \begin{cases} x_1+4x_2-x_3+x_5=0\\ 2x_1-6x_2+5x_3-x_4+2x_5=0\\ -x_1+x_2+x_3=0\end{cases}$$

$$k.\quad \begin{cases} 2x_1+4x_2-6x_3-2x_4=0\\ x_1-5x_2+2x_3+2x_4=0\\ 4x_2-x_3+3x_4=0\\ 3x_1-x_2-4x_3=0\\ x_1+2x_2-3x_3-x_4=0\\ 3x_1+3x_2-5x_3+3x_4=0\end{cases} \qquad l.\quad \begin{cases} 2x_1+3x_2-5x_3-x_4=0\\ x_1-5x_2+2x_3+2x_4=0\\ 4x_2-x_3+3x_4=0\\ 3x_1-2x_2-2x_3+4x_4=0\\ x_1-x_2-x_3-x_4=0\\ 4x_1+5x_3-6x_4=0\end{cases}$$

31. Sean $A=\begin{pmatrix}2&3\\4&-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$. Hallar las componentes del vector $\boldsymbol{x}$ para que $A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}$ sea igual al vector $\mathbf{0}$.
32. Sean $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}7\\13\end{pmatrix}$. Hallar las componentes del vector $\boldsymbol{x}$ para que $A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}$ sea igual al vector $\mathbf{0}$.
33. Sean $A=\begin{pmatrix}i&1\\-2&2i\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2i\\-4\end{pmatrix}$. Hallar las componentes del vector $\boldsymbol{x}$ para que $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$.
34. Hallar el valor de c_1 y c_2, tal que, $c_1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.
35. Hallar el valor de c_1, c_2 y c_3, tal que, $c_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.
36. Hallar el valor de c_1, c_2 y c_3, tal que, $c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}-3\\5\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.
37. Hallar el valor de c_1, c_2 y c_3, tal que, $c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.
38. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}a&1\\1&a\end{pmatrix}$, con a real y $a>0$. ¿Para qué valores de a se cumplirá

    i. $A^2=A$ *ii.* $A^2=I$ *iii.* $A^2=0$.?

39. Determinar si las siguientes proposiciones son **VERDADERO** o **FALSO**. Justifique todas sus respuestas.

   (a) Si $\boldsymbol{x_1}$ y $\boldsymbol{x_2}$ son soluciones del sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ y si c_1 y c_2 son escalares, entonces, $c_1\boldsymbol{x_1} + c_2\boldsymbol{x_2}$ también es solución de dicho sistema, para todo $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

   (b) Si $\boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{z}$ son soluciones del sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, entonces $\boldsymbol{w} = \dfrac{1}{4}\,\boldsymbol{y} + \dfrac{3}{4}\,\boldsymbol{z}$ también lo es.

   (c) Para todo sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, con A una matriz de tamaño $m \times n$, $m > n$, hay solución única.

   (d) Si $\boldsymbol{x_1}$ y $\boldsymbol{x_2}$ son soluciones del sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, entonces $\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2}$ también es solución de dicho sistema.

   (e) Si $\boldsymbol{x_1}$ y $\boldsymbol{x_2}$ son soluciones del sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, entonces $\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2}$ es solución del sistema homogéneo asociado, es decir, del sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

   (f) Si $\boldsymbol{x_1}$ y $\boldsymbol{x_2}$ son soluciones del sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, entonces $\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2}$ es solución del sistema homogéneo asociado, es decir, del sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

   (g) Un sistema compatible determinado puede tener más incógnitas que ecuaciones.

   (h) Un sistema compatible determinado puede tener más ecuaciones que incógnitas.

   (i) Un sistema compatible determinado puede tener más ecuaciones independientes que incógnitas.

   (j) Para todo sistema incompatible se verifica que el número de ecuaciones independientes es mayor o igual que el de incógnitas.

   (k) El número de ecuaciones independientes de todo sistema compatible indeterminado es menor que el número de incógnitas.

   (l) No existen sistemas compatibles indeterminados con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas.

40. Dar un ejemplo de un sistema incompatible con dos ecuaciones y tres incógnitas.

41. Dar un ejemplo de un sistema compatible determinado con tres ecuaciones y dos incógnitas.

42. Dar un ejemplo de un sistema incompatible con tres ecuaciones y dos incógnitas.

43. Dar un ejemplo de un sistema compatible indeterminado con tres ecuaciones y tres incógnitas.

44. Hallar un sistema de ecuaciones cuya solución general sea

$$x_1 = -\frac{7}{3} + t, \qquad x_2 = u, \qquad x_3 = 3t - 2u.$$

45. Hallar un sistema de ecuaciones cuya solución general sea

$$x_1 = -9 + t, \qquad x_2 = -10 + 2t, \qquad x_3 = -t.$$

46. Hallar un sistema de ecuaciones cuya solución general sea

$$x_1 = -\frac{13}{5} + t + u, \qquad x_2 = \frac{12}{5} + t, \qquad x_3 = u, \qquad x_4 = 5t + 2u.$$

47. Sean $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. Si $c_1 a + c_2 b = x$, entonces

   (a) Expresar las constantes c_1, c_2 en términos de α y β.

   (b) Encontrar los valores de c_1, c_2 en términos de $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

   (c) Encontrar los valores de c_1, c_2 en términos de $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(d) Encontrar los valores de c_1, c_2 en términos de $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(e) Encontrar los valores de c_1, c_2 en términos de $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ e^2 \end{pmatrix}$.

48. Hallar el valor de las constantes para que cada uno de los sistemas de ecuaciones dado a continuación cumpla con lo siguiente

(a) Tenga solución única y hallarla.

(b) Tenga infinitas soluciones y hallarlas.

(c) No tenga solución

1. $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 4x+5y+6z=1 \\ 3x+6y+\alpha z=3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y+2z=2 \\ 2x-y+3z=2 \\ 5x-y+\alpha z=6 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x+y+10z=1 \\ x+5z=-1 \\ -3x+\alpha z=3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x+2y-z=1 \\ x+w=b \\ x+y+z=1 \\ x-aw=1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x+y+z=8 \\ y+2z=3 \\ x+\alpha z=0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x+\alpha z=1 \\ x+3y+\alpha z=1 \\ y+2z=0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x+y+3z=-5 \\ x+y+z=0 \\ \alpha x+(2\alpha-1)\,y+z=-10 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 5x-4y+13z=\alpha \\ 12x+3y-z=2\alpha \\ 9x-y-5z=3\alpha z \end{cases}$

9. $\begin{cases} \alpha x+2y+3z=1 \\ \alpha^2 x+4y+9z=2 \\ \alpha^3 x+8y+27z=3 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x-4y+7z=b-11 \\ x-y+2z=-3 \\ 2x-y+3z=-4 \\ -x+3y+(a-4)\,z=b+7 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x+y=3 \\ x+\left(a^2-8\right)y=a \end{cases}$

12. $\begin{cases} ax+ay-z=2 \\ 3x-ay=0 \\ 5x+ay=0 \\ x+2y=1 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x+3y+z=2 \\ x+2y-5z=4 \\ 2x+5y-\lambda^2 z=\lambda+4 \end{cases}$

49. Considerar el sistema $Ax=b$, con $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1-\alpha \\ 0 & \alpha & 2 \\ \alpha & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $x=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Determinar los valores de α para los cuales el sistema

a. Tenga solución única. *b.* Tenga infinitas soluciones. *c.* No tenga solución.

50. Sean $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & \alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

a. Hallar α, tal que $(AB)\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ tenga solución única. *b.* Resolver el sistema si $\alpha=1$.

51. Dada la matriz A. Hallar una matriz B, si es existe, tal que, $AB = I$.

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 2. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ 3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 5. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 6. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 8. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 9. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

10. $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 11. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 12. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

13. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 14. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ 15. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

16. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 17. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ 18. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \\ 0 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

19. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ 20. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

52. Hallar los valores de las constantes c_1, c_2, c_3 y c_4, tales que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Respuestas: Ejercicios

1.1. $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; 1.2. $\begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix}$; 1.3. $\begin{pmatrix} \frac{9}{11} \\ \frac{1}{22} \end{pmatrix}$; 1.4. $\begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$; 1.5. $\begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-4} \\ \frac{2}{\sqrt{2}-4} \end{pmatrix}$; 1.6. $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$;

1.7. $\begin{pmatrix} 7-y \\ y \end{pmatrix}$, $y \in \mathbb{R}$; 1.8. $\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$; 1.9. $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; 1.10. $\begin{pmatrix} \frac{27}{19} \\ \frac{20}{19} \end{pmatrix}$; 1.11. No tiene solución;

1.12. $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; 1.13. $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$; 1.14. $\begin{pmatrix} -\frac{13}{11} \\ \frac{120}{11} \end{pmatrix}$; 1.15. No tiene solución; 1.16. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

1.17. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$; 1.18. $\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$; 1.19. $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$; 1.20. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; 1.21. $\begin{pmatrix} \frac{4}{13} \\ -\frac{20}{13} \end{pmatrix}$;

1.22. No tiene solución; 1.23. No tiene solución; 1.24. $\begin{pmatrix} \frac{47}{16} \\ -\frac{13}{32} \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$; 1.25. $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$;

1.26. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} - x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $x_3 \in \mathbb{R}$; 2.1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$; 2.2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

2.3. $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; 2.4. $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; 2.5. $A = \begin{pmatrix} \sqrt{8} & \sqrt{2} \\ 2 & \sqrt{8} \end{pmatrix}$; 2.6. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$;

2.7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; 2.8. $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; 2.9. $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; 2.10. $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$;

2.11. $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -12 \end{pmatrix}$; 2.12. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$; 2.13. $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; 2.14. $A = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$;

2.15. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$; 2.16. $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$; 2.17. $A = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 26 & 15 \end{pmatrix}$; 2.18. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$;

2.19. $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$; 2.20. $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -4 \end{pmatrix}$; 2.21. $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$; 2.22. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$;

2.23. $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 4 & -7 & -1 \end{pmatrix}$; 2.24. $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 7 \\ 1 & 6 & -3 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; 2.25. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 6 & -2 & 7 \end{pmatrix}$;

2.26. $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 \\ 6 & -2 & -5 \\ -6 & 4 & 7 \end{pmatrix}$; 3.1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$;

3.2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$; 3.3. $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$;

3.4. $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; 3.5. $A = \begin{pmatrix} \sqrt{8} & \sqrt{2} \\ 2 & \sqrt{8} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$;

3.6. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$; 3.7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \end{pmatrix}$;

3.8. $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -10 \end{pmatrix}$; 3.9. $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$;

3.10. $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$; 3.11. $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -12 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$;

3.12. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 19 \\ -8 \end{pmatrix}$; 3.13. $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 17 \\ 8 \end{pmatrix}$;

3.14. $A = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 41 \\ 5 \end{pmatrix}$; 3.15. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix}$;

3.16. $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; 3.17. $A = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 26 & 15 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$;

3.18. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$; 3.19. $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$;

3.20. $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; 3.21. $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$;

3.22. $A=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}7\\10\end{pmatrix}$; 3.23. $A=\begin{pmatrix}5&1&1\\4&-7&-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$;

3.24. $A=\begin{pmatrix}5&-2&7\\1&6&-3\\-2&4&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}-2\\8\\-10\end{pmatrix}$; 3.25. $A=\begin{pmatrix}3&2&-1\\1&1&4\\6&-2&7\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}10\\-1\\11\end{pmatrix}$;

3.26. $A=\begin{pmatrix}-4&2&4\\6&-2&-5\\-6&4&7\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$; 4. No es solución; 5. Si es solución;

6. No es solución; 7. Si es solución; 8. Si es solución; 9.a. $A=\begin{pmatrix}2&1\\3&4\end{pmatrix}$; 9.$b$. $A=\begin{pmatrix}2&1\\3&4\end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$; 9.$c$. $\left(\begin{array}{cc|c}2&1&-2\\3&4&4\end{array}\right)$; 9.$d$. $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{12}{5}\\\frac{14}{5}\end{pmatrix}$; 10. $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{7}\\\frac{9}{7}\end{pmatrix}$;

11. $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{9}{4}\\\frac{1}{4}\end{pmatrix}$; 12. No tiene solución; 13. $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}\\-\frac{4}{5}\end{pmatrix}$; 14. $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{13}{7}\\-\frac{5}{7}\end{pmatrix}$;

15.a. $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\3&4&-2\end{pmatrix}$; 15.$b$. $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\3&4&-2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$; 15.$c$. $\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&2&8\\3&4&-2&4\end{array}\right)$;

15.d. $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{36}{11}-\frac{6}{11}x_3\\\frac{10}{11}x_3-\frac{16}{11}\\x_3\end{pmatrix}$, con $x_3\in\mathbb{R}$; 16.a. $A=\begin{pmatrix}1&3&-2\\3&-2&3\end{pmatrix}$; 16.$b$. $A=\begin{pmatrix}1&3&-2\\3&-2&3\end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$; 16.$c$. $\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&-2&4\\3&-2&3&6\end{array}\right)$; 16.$d$. $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{62}{11}-\frac{5}{11}x_3\\\frac{9}{11}x_3-\frac{6}{11}\\x_3\end{pmatrix}$, con $x_3\in\mathbb{R}$;

17.a. $A=\begin{pmatrix}-4&2&4\\6&-2&-5\\-6&4&7\end{pmatrix}$; 17.$b$. $A=\begin{pmatrix}-4&2&4\\6&-2&-5\\-6&4&7\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$;

17.c. $\left(\begin{array}{ccc|c}-4&2&4&1\\6&-2&-5&0\\-6&4&7&3\end{array}\right)$; 17.$d$. $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x_3\\\frac{3}{2}-x_3\\x_3\end{pmatrix}$, con $x_3\in\mathbb{R}$; 18.a. $A=\begin{pmatrix}2&5&-1\\0&7&-2\\-1&3&-1\end{pmatrix}$;

18.b. $A=\begin{pmatrix}2&5&-1\\0&7&-2\\-1&3&-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$; 18.$c$. $\left(\begin{array}{ccc|c}2&5&-1&1\\0&7&-2&-1\\-1&3&-1&2\end{array}\right)$;

18.d. $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9\\13\\46\end{pmatrix}$; 19.$a$. $A=\begin{pmatrix}1&-3&1\\4&2&1\\3&-1&-2\end{pmatrix}$; 19.$b$. $A=\begin{pmatrix}1&-3&1\\4&2&1\\3&-1&-2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}13\\-2\\-5\end{pmatrix}$; 19.$c$. $\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&1&13\\4&2&1&-2\\3&-1&-2&-5\end{array}\right)$; 19.$d$. $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-3\\4\end{pmatrix}$; 20.$a$. $A=\begin{pmatrix}3&6&-2\\1&1&-3\\2&2&-6\end{pmatrix}$;

20.b. $A=\begin{pmatrix}3&6&-2\\1&1&-3\\2&2&-6\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\6\\5\end{pmatrix}$; 20.$c$. $\left(\begin{array}{ccc|c}3&6&-2&1\\1&1&-3&6\\2&2&-6&5\end{array}\right)$; 20.$d$. No tiene solución;

21.a. $A=\begin{pmatrix}3&-2&2&0\\1&1&4&7\end{pmatrix}$; 21.$b$. $A=\begin{pmatrix}3&-2&2&0\\1&1&4&7\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$;

21.c. $\left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & -2 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 4 & 7 & 5 \end{array}\right)$; 21.$d$. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} - \frac{14}{5}x_4 - 2x_3 \\ \frac{17}{5} - 2x_3 - \frac{21}{5}x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, con $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$;

22.a. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; 22.$b$. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

22.c. $\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$; 22.$d$. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_3 + x_4 \\ 3x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, con $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$;

23.a. $A = \begin{pmatrix} 15 & 10 & -5 \\ 25 & -15 & -21 \\ -10 & 25 & 16 \end{pmatrix}$; 23.$b$. $A = \begin{pmatrix} 15 & 10 & -5 \\ 25 & -15 & -21 \\ -10 & 25 & 16 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -13 \\ 9 \end{pmatrix}$;

23.c. $\left(\begin{array}{rrr|r} 15 & 10 & -5 & -4 \\ 25 & -15 & -21 & -13 \\ -10 & 25 & 16 & 9 \end{array}\right)$; 23.$d$. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}x_3 - \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} - \frac{2}{5}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$, con $x_3 \in \mathbb{R}$;

24.a. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -11 \end{pmatrix}$; 24.$b$. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -11 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$;

24.c. $\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 4 & -6 & 2 \\ 4 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & 6 & -11 & 4 \end{array}\right)$; 24.$d$. No tiene solución; 25.$a$. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -4 \\ 0 & 14 & -2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$;

25.b. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -4 \\ 0 & 14 & -2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -15 \\ 4 \end{pmatrix}$; 25.$c$. $\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 2 & 8 \\ 1 & 5 & -4 & -4 \\ 0 & 14 & -2 & -15 \\ 3 & 4 & -2 & 4 \end{array}\right)$;

25.d. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; 26.$a$. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 5 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$; 26.$b$. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 5 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}$; 26.$c$. $\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 & -2 & 6 \\ -2 & -1 & 0 & 6 & -7 \\ 4 & 2 & -3 & 0 & -4 \end{array}\right)$; 26.$d$. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$;

27.a. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -8 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -3 & 18 & -12 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$; 27.$b$. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -8 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -3 & 18 & -12 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 12 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$;

27.c. $\left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & -2 & 1 & -8 & 8 \\ -2 & 1 & 1 & 4 & -4 \\ -1 & -3 & 18 & -12 & 12 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 4 & -4 \end{array}\right)$; 27.$d$. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_3 \\ 5x_3 - 4x_4 - 4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, con $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$;

28.a. $A=\begin{pmatrix}1&-1&2&3\\3&0&5&-2\\-2&-1&-3&5\end{pmatrix}$; 28.$b$. $A=\begin{pmatrix}1&-1&2&3\\3&0&5&-2\\-2&-1&-3&5\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}3\\-2\\8\end{pmatrix}$;

28.c. $\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&2&3&3\\3&0&5&-2&-2\\-2&-1&-3&5&8\end{array}\right)$; 28.$d$. No tiene solución; 29.1. $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$;

29.2. $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\-3\end{pmatrix}$; 29.3. $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{9}{11}\\\frac{1}{22}\end{pmatrix}$; 29.4. $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$; 29.5. $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}}\\\frac{2}{\sqrt{2}-4}\end{pmatrix}$;

29.6. $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$; 29.7. $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7-y\\y\end{pmatrix}$, con $y\in\mathbb{R}$; 29.8. $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}$;

29.9. $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$; 29.10. $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{27}{19}\\\frac{20}{19}\end{pmatrix}$; 29.11. No tiene solución; 29.12. $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$;

29.13. $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$; 29.14. $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{13}{11}\\\frac{120}{11}\end{pmatrix}$; 29.15. No tiene solución; 29.16. $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$;

29.17. $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{3}{5}\end{pmatrix}$; 29.18. $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\\frac{5}{2}\end{pmatrix}$; 29.19. $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$; 29.20. $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$;

29.21. $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{13}\\-\frac{20}{13}\end{pmatrix}$; 29.22. No tiene solución; 29.23. $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{39}-\frac{2}{13}x_3\\-\frac{14}{39}-\frac{3}{13}x_3\\x_3\end{pmatrix}$, con $x_3\in\mathbb{R}$;

29.24. $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{47}{16}\\-\frac{13}{32}\\-\frac{5}{2}\end{pmatrix}$; 29.25. $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$; 29.26. $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}-x_3\\x_3\end{pmatrix}$, con $x_3\in\mathbb{R}$;

29.27. $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$; 29.28. $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-3\\4\end{pmatrix}$; 29.29. $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5}z-\frac{2}{5}\\\frac{1}{5}-\frac{2}{5}z\\z\end{pmatrix}$, con $z\in\mathbb{R}$;

29.30. $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{23}{27}\\\frac{7}{27}\\-\frac{11}{27}\end{pmatrix}$; 29.31. No tiene solución; 29.32. $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$;

29.33. $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\\frac{9}{2}\\-\frac{5}{2}\end{pmatrix}$; 29.34. $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-2x_3\\11-2x_3\\x_3\\16\end{pmatrix}$, con $x_3\in\mathbb{R}$; 29.35. $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\5\\2\\-1\end{pmatrix}$;

30.a. $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5z\\4z\\z\end{pmatrix}$, con $z\in\mathbb{R}$; 30.b. $\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-19z-13w\\8z+4w\\z\\w\end{pmatrix}$, con $z,w\in\mathbb{R}$; 30.c. $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$;

30.d. $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$; 30.$e$. $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$; 30.$f$. $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$; 30.$g$. $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$;

30.h. $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{37}{8}x_4\\-\frac{13}{4}x_4\\-\frac{19}{8}x_4\\x_4\end{pmatrix}$, con $x_4\in\mathbb{R}$; 30.i. $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{83}{23}x_4\\-\frac{195}{23}x_4\\-\frac{99}{23}x_4\\x_4\end{pmatrix}$, con $x_4\in\mathbb{R}$;

30.j. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{33}{35}x_4 - \frac{7}{5}x_5 \\ -\frac{1}{5}x_4 \\ \frac{1}{7}x_4 - \frac{2}{5}x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$, con $x_4, x_5 \in \mathbb{R}$; 30.k. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; 30.$l$. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

31. $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \frac{13}{14} \\ -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$; 32. $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$; 33. $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 + i\beta \\ \beta \end{pmatrix}$, con $\beta \in \mathbb{R}$; 34. $c_1 = 0$, $c_2 = 0$;

35. $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$; 36. $c_1 = c_3$, $c_2 = -2c_3$, con $c_3 \in \mathbb{R}$; 37. $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$;

38.i. No tiene solución; 38.ii. No tiene solución; 38.iii. No tiene solución; 39.a. Verdadero;

39.b. Verdadero; 39.c. Falso; 39.d. Falso; 39.e. Verdadero; 39.f. Falso; 39.g. Falso;

39.h. Verdadero; 39.i. Falso; 39.j. Verdadero; 39.k. Verdadero; 39.l. Falso; 47.a. $c_1 = \frac{2}{3}\alpha + \frac{2}{3}\beta$, $c_2 = -\frac{1}{3}\alpha + \frac{2}{3}\beta$; 47.$b$. $c_1 = \frac{14}{3}$, $c_2 = \frac{5}{3}$; 47.c. $c_1 = -\frac{2}{3}$, $c_2 = \frac{1}{3}$; 47.d. $c_1 = \frac{11}{3}$, $c_2 = -\frac{4}{3}$;

47.e. $c_1 = \frac{2\pi+2e^2}{3}$, $c_2 = \frac{2e^2-\pi}{3}$; 48.1.a. $\alpha \in \mathbb{R} - \{9\}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; 48.1.$b$. $\alpha = 9$,

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z-1 \\ -2z+1 \\ z \end{pmatrix}$, con $z \in \mathbb{R}$; 48.1.c. No existe α; 48.2.a. $\alpha \in \mathbb{R} - \{8\}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$;

48.2.b. $\alpha = 8$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} - \frac{5}{3}z \\ \frac{2}{3} - \frac{1}{3}z \\ z \end{pmatrix}$, con $z \in \mathbb{R}$; 48.2.c. No existe α; 48.3.a. $\alpha \in \mathbb{R} - \{-15\}$,

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$; 48.3.$b$. $\alpha = -15$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-5z \\ 3 \\ z \end{pmatrix}$, con $z \in \mathbb{R}$; 48.3.c. No existe α;

48.4.a. $a \neq -1$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{ab+1}{a+1} \\ \frac{2}{3}\ \frac{a-2ab-1}{a+1} \\ \frac{a+ab+2}{3(a+1)} \\ \frac{b-1}{a+1} \end{pmatrix}$; 48.4.$b$. $a = -1$ y $b = 1$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-w \\ \frac{4}{3}w - \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} - \frac{1}{3}w \\ w \end{pmatrix}$, con $w \in \mathbb{R}$;

48.4.c. $a = -1$ y $b \neq 1$; 48.5.a. $\alpha \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5a}{2\alpha+1} \\ \frac{6\alpha+13}{2\alpha+1} \\ -\frac{5}{2\alpha+1} \end{pmatrix}$; 48.5.$b$. No existe α;

48.5.c. $\alpha = -\frac{1}{2}$; 58.6.a. $\alpha \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; 48.6.$b$. No existe α; 48.6.c. No existe α;

48.7.a. No existe α; 48.7.b. $\alpha = -1$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5-2z \\ 5+z \\ z \end{pmatrix}$; 48.7.$c$. $\alpha \neq -1$; 48.8.a. $\alpha \in \mathbb{R}$,

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{187}{791}\alpha \\ -\frac{250}{791}\alpha \\ -\frac{88}{791}\alpha \end{pmatrix}$; 48.8.$b$. No existe α; 48.8.c. No existe α; 48.9.a. $\alpha \notin \{0, 2, 3\}$,

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha(3-\alpha)(\alpha-2)} \\ \frac{3-\alpha}{4-2\alpha} \\ \frac{1}{3\alpha-9} \end{pmatrix}$; 48.9.$b$. No existe α; 48.9.c. $\alpha \in \{0, 2, 3\}$; 48.10.a. $a \neq 0$ y $b = 0$,

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; 48.10.$b$. $a = 0$ y $b = 0$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z-1 \\ z+2 \\ z \end{pmatrix}$; 48.10.$c$. $b \neq 0$;

48.11.a. $\alpha \neq \pm 3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3a+8}{a+3} \\ \frac{1}{a+3} \end{pmatrix}$; 48.11.$b$. $\alpha = 3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-y \\ y \end{pmatrix}$; 48.11.$c$. $\alpha = -3$;

48.12.a. $a = 4$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$; 48.12.$b$. No existe α; 48.12.c. $a \neq 4$; 48.13.a. $\lambda \neq \pm 2$,

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8\lambda-1}{\lambda+2} \\ \frac{2(1-\lambda)}{\lambda+2} \\ \frac{-1}{\lambda+2} \end{pmatrix}$; 48.13.$b$. $\lambda = 2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17z+8 \\ -6z-2 \\ z \end{pmatrix}$; 48.13.$c$. $\lambda = -2$;

49.a. $\alpha \neq \frac{1\pm i\sqrt{7}}{2}$; 49.$b$. $\alpha = \frac{1\pm i\sqrt{7}}{2}$; 49.$c$. No existe α; 50.a. No existe α; 50.b. No tiene solución.;

51.1. $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; 51.2. $B = \begin{pmatrix} -\frac{3}{11} & \frac{2}{11} \\ \frac{4}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix}$; 51.3. $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$; 51.4. $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$;

51.5. $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; 51.6. $B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; 51.7. $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$;

51.8. $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$; 51.9. $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -7 & 3 \end{pmatrix}$; 51.10. $B = \begin{pmatrix} -2a_{31} & 1-2a_{32} \\ 5a_{31}-1 & 5a_{32}-2 \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$,

con $a_{31}, a_{32} \in \mathbb{R}$; 51.11. $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} - \frac{7}{3}a_{31} & 1-7a_{32} \\ \frac{5}{3}a_{31} - \frac{2}{3} & 11a_{32}-1 \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$, con $a_{31}, a_{32} \in \mathbb{R}$; 51.12. No existe;

51.13. $B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$; 51.14. No existe; 51.15. $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

51.16. $B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; 51.17. $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; 51.18. No existe;

51.19. $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; 51.20. $B = \begin{pmatrix} -11 & 8 & 2 & 3 \\ -4 & 3 & 1 & 1 \\ 27 & -19 & -5 & -7 \\ -14 & 10 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; 52. $c_1 = \frac{8}{23}b - \frac{13}{23}a - \frac{5}{23}c + \frac{11}{23}d$,

$c_2 = \frac{3}{23}a + \frac{7}{23}b + \frac{10}{23}c + \frac{1}{23}d$, $c_3 = \frac{2}{23}b - \frac{9}{23}a - \frac{7}{23}c - \frac{3}{23}d$, $c_4 = \frac{7}{23}a + \frac{1}{23}b + \frac{8}{23}c + \frac{10}{23}d$;

Bibliografía

1. **Grossman, Staley I.**: "*Álgebra lineal*". Quinta edición. Mc Graw Hill.
2. **Kolman, B. y Hill, D. R.**: "*Álgebra lineal*". Octava edición. PEARSON Prentice Hall.
3. **Rangel, J., y otros**: "*Problemario de álgebra lineal*". Universidad Metropolitana. 1997.
4. **Anton, H. - Rorres, C.**: "*Elementary linear algebra. Applications version*". Six Edition. WILEY.

Este material ha sido revisado recientemente, pero esto no garantiza que esté libre de errores, por esa razón se agradece reportar cualquier error que usted encuentre en este material enviando un mensaje al correo electrónico

farith.math@gmail.com

indicando donde se encuentra(n) dicho(s) error(es). **MUCHAS GRACIAS**.

Matriz inversa. Determinante

Objetivos a cubrir

Código : MAT-3.03

- Matriz Inversa.
- Determinante. Calculo de determinantes. Propiedades de los determinantes.
- Adjunta de una matriz. Calculo de la inversa de una matriz usando la adjunta.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 54 *: Hallar la matriz inversa de*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución : Consideramos la matriz aumentada con la identidad de tamaño 4×4

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada para transformar dicha matriz en su forma escalonada reducida

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-2F_1 + F_4 \to F_4]{-3F_1 + F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\;]{\substack{-F_2+F_3\to F_3 \\ -2F_2+F_4\to F_4}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -7 & -10 & 1 & 2 & 0 & -8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}F_3\to F_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 0 & -7 & -10 & 1 & 2 & 0 & -8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[7F_3+F_4\to F_4]{\substack{-F_3+F_1\to F_1 \\ -2F_3+F_2\to F_2}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 1 & \frac{13}{3} & \frac{7}{3} & -15 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{10}F_4\to F_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{10} & -\frac{13}{30} & -\frac{7}{30} & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\;]{\substack{-F_4+F_1\to F_1 \\ -4F_4+F_2\to F_2}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{15} & \frac{4}{15} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{10} & -\frac{13}{30} & -\frac{7}{30} & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

Luego, la inversa de la matriz A viene dada por

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{15} & \frac{4}{15} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{10} & -\frac{13}{30} & -\frac{7}{30} & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

★

Ejemplo 55 *: Demostrar que si A es una matriz invertible, tal que $A^3 = I$, entonces $A^{2n} = A^{-n}$, con $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración : Tenemos que

$$A^3 = I \qquad \Longrightarrow \qquad A^2 A = I$$

como A es invertible, entonces existe A^{-1}, multiplicamos la última igualdad por la matriz inversa de A.

$$A^2 A A^{-1} = I A^{-1} \qquad \Longrightarrow \qquad A^2 = A^{-1},$$

multiplicamos, ambos lados de la igualdad, por A^2, $(n-1)$ −veces

$$A^2 \underbrace{A^2 A^2 A^2 \cdots A^2}_{(n-1)\,-\text{veces}} = A^{-1} \underbrace{A^2 A^2 A^2 \cdots A^2}_{(n-1)\,-\text{veces}},$$

como $A^2 = A^{-1}$, entonces

$$\underbrace{A^2 A^2 A^2 A^2 \cdots A^2}_{n-\text{veces}} = \underbrace{A^{-1} A^{-1} A^{-1} A^{-1} \cdots A^{-1}}_{n-\text{veces}} \qquad \Longrightarrow \qquad \left(A^2\right)^n = \left(A^{-1}\right)^n \qquad \Longrightarrow \qquad A^{2n} = A^{-n}$$

con lo que, si A es una matriz invertible, tal que $A^3 = I$, se tiene $A^{2n} = A^{-n}$. ★

Ejemplo 56 *: Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar una matriz escalón reducida por filas, R, que sea equivalente a A y una matriz invertible $P_{3\times 3}$, tal que $R = PA$.

Solución : Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz A para transformar dicha matriz en su forma escalonada reducida R.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-F_1 + F_3 \to F_3]{F_1 + F_2 \to F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}F_2 \to F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[4F_2 + F_3 \to F_3]{-2F_2 + F_1 \to F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 8 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & \dfrac{5}{2} \\ 0 & 0 & 8 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{8}F_3 \to F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & \dfrac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{11}{8} \end{pmatrix} \xrightarrow[-2F_3+F_2 \to F_2]{3F_3+F_1 \to F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\dfrac{7}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{21}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{11}{8} \end{pmatrix},$$

por lo tanto, la matriz R es

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\dfrac{7}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{21}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{11}{8} \end{pmatrix}.$$

Sea P la matriz de coeficientes

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

entonces

$$R = PA \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\dfrac{7}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{21}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{11}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\dfrac{7}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{21}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{11}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}-a_{12}+a_{13} & 2a_{11}-2a_{13} & a_{11}+3a_{12}+a_{13} & 5a_{12}+a_{13} \\ a_{21}-a_{22}+a_{23} & 2a_{21}-2a_{23} & a_{21}+3a_{22}+a_{23} & 5a_{22}+a_{23} \\ a_{31}-a_{32}+a_{33} & 2a_{31}-2a_{33} & a_{31}+3a_{32}+a_{33} & 5a_{32}+a_{33} \end{pmatrix},$$

de aquí, se obtienen los siguientes sub-sistemas

$$\begin{cases} a_{11}-a_{12}+a_{13} = 1 \\ 2a_{11}-2a_{13} = 0 \\ a_{11}+3a_{12}+a_{13} = 0 \\ 5a_{12}+a_{13} = -\dfrac{7}{8} \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{21}-a_{22}+a_{23} = 0 \\ 2a_{21}-2a_{23} = 1 \\ a_{21}+3a_{22}+a_{23} = 0 \\ 5a_{22}+a_{23} = -\dfrac{1}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{31}-a_{32}+a_{33} = 0 \\ 2a_{31}-2a_{33} = 0 \\ a_{31}+3a_{32}+a_{33} = 1 \\ 5a_{32}+a_{33} = \dfrac{11}{8} \end{cases}$$

- Resolvemos el primer sub-sistema

$$\begin{cases} a_{11} - a_{12} + a_{13} = 1 \\ 2a_{11} - 2a_{13} = 0 \\ a_{11} + 3a_{12} + a_{13} = 0 \\ 5a_{12} + a_{13} = -\dfrac{7}{8} \end{cases} \implies \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -\dfrac{7}{8} \end{array} \right)$$

- Resolvemos el segundo sub-sistema

$$\begin{cases} a_{21} - a_{22} + a_{23} = 0 \\ 2a_{21} - 2a_{23} = 1 \\ a_{21} + 3a_{22} + a_{23} = 0 \\ 5a_{22} + a_{23} = \dfrac{21}{4} \end{cases} \implies \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -\dfrac{1}{4} \end{array} \right)$$

- Resolvemos el tercer sub-sistema

$$\begin{cases} a_{31} - a_{32} + a_{33} = 0 \\ 2a_{31} - 2a_{33} = 0 \\ a_{31} + 3a_{32} + a_{33} = 1 \\ 5a_{32} + a_{33} = \dfrac{11}{8} \end{cases} \implies \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & \dfrac{11}{8} \end{array} \right)$$

Observemos que los tres sub-sistemas poseen la misma matriz de coeficientes, lo único que cambia es el vector recurso, así, podemos resolver los tres sub-sistema simultaneamente, aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -\dfrac{7}{8} & -\dfrac{1}{4} & \dfrac{11}{8} \end{array} \right)$$

para transformar dicha matriz en su forma escalonada reducida y obtener la matriz P.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -\dfrac{7}{8} & -\dfrac{1}{4} & \dfrac{11}{8} \end{array} \right) \xrightarrow[-F_1 + F_3 \to F_3]{-2F_1 + F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -\dfrac{7}{8} & -\dfrac{1}{4} & \dfrac{11}{8} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -\dfrac{7}{8} & -\dfrac{1}{4} & \dfrac{11}{8} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -\frac{7}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{11}{8} \end{array}\right) \xrightarrow[-5F_2+F_4\to F_4]{\substack{F_2+F_1\to F_1 \\ -4F_2+F_3\to F_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & \frac{33}{8} & -\frac{11}{4} & \frac{11}{8} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{8}F_3\to F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 11 & \frac{33}{8} & -\frac{11}{4} & \frac{11}{8} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-11F_3+F_4\to F_4]{\substack{F_3+F_1\to F_1 \\ 2F_3+F_2\to F_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Luego, la matriz buscada es

$$P = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix},$$

la cual es invertible, ya que

$$|P| = \begin{vmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{vmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{vmatrix} - \left(-\frac{1}{4}\right)\begin{vmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\left(-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{8}\right) - \left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\right) + \frac{1}{4}\left(\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{8}\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{32} - \frac{3}{32}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{32} + \frac{1}{32}\right) = -\frac{1}{4}\left(-\frac{4}{32}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{4}{32}\right) = \frac{1}{16} \neq 0.$$

El determinante de la matriz P se calculó usando una expansión por cofactores sobre la segunda fila. ★

Ejemplo 57 *: Sea la matriz* $A = \begin{pmatrix} a & b & a \\ 1 & 0 & 0 \\ x & y & -2 \end{pmatrix}$ *invertible. Si* $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & a & x \\ -2 & 2 & b \\ -1 & y & -1 \end{pmatrix}$, *hallar los valores de* a, b, x *e* y.

Solución : Como A es invertible, se tiene que $AA^{-1} = I$, es decir,

$$\begin{pmatrix} a & b & a \\ 1 & 0 & 0 \\ x & y & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & x \\ -2 & 2 & b \\ -1 & y & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

puesto que,

$$\begin{pmatrix} a & b & a \\ 1 & 0 & 0 \\ x & y & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & x \\ -2 & 2 & b \\ -1 & y & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a-2b & 2b+ay+a^2 & -a+ax+b^2 \\ 0 & a & x \\ -2y+2 & ax & by+x^2+2 \end{pmatrix},$$

se cumple que

$$\begin{pmatrix} -a-2b & 2b+ay+a^2 & -a+ax+b^2 \\ 0 & a & x \\ -2y+2 & ax & by+x^2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de aquí,

$$\left\{ \begin{array}{ll} 1. & -a-2b = 1 \\ 2. & 2b+ay+a^2 = 0 \\ 3. & -a+ax+b^2 = 0 \\ 4. & a = 1 \\ 5. & x = 0 \\ 6. & -2y+2 = 0 \\ 7. & ax = 0 \\ 8. & by+x^2+2 = 1 \end{array} \right.$$

de la ecuación 4. y 5. se tiene que

$$a = 1, \qquad x = 0,$$

con lo que la ecuación 7. se satisface y el sistema se reduce a las ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{ll} 1. & -1-2b = 1 \\ 2. & 2b+y+1 = 0 \\ 3. & -1+b^2 = 0 \\ 6. & -2y+2 = 0 \\ 8. & by+2 = 1 \end{array} \right.$$

de la ecuación 6. se tiene que

$$-2y+2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = 1,$$

y el sistema se reduce a

$$\left\{ \begin{array}{ll} 1. & -1-2b = 1 \\ 2. & 2b+1+1 = 0 \\ 3. & -1+b^2 = 0 \\ 8. & b+2 = 1 \end{array} \right.$$

de la ecuación 8. se tiene que

$$b+2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad b = -1,$$

y las ecuaciones 1., 2. y 3. se satisfacen.

Luego, los valores son

$$a = 1, \qquad x = 0, \qquad y = 1 \qquad b = -1.$$

★

Ejemplo 58 *: Sea A una matriz $n \times n$ dada por*

$$A = \begin{pmatrix} x_1+1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2+1 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3+1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n+1 \end{pmatrix}$$

Demuestre que $|A| = 1 + x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$.

Demostración : Aplicando operaciones elementales sobre las filas de A, se tiene

$$\begin{pmatrix} x_1+1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2+1 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3+1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{con } j=2,3,\ldots,n]{-F_1+F_j \to F_j} \begin{pmatrix} x_1+1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\vdots \\ -x_nF_n+F_1 \to F_1}]{\substack{-x_2F_2+F_1 \to F_1 \\ -x_3F_3+F_1 \to F_1}} \begin{pmatrix} x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n+1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

la cual es una matriz triangular inferior, así, su determinante es el producto de los elementos de su diagonal, con lo que

$$|A| = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n + 1$$

★

Ejemplo 59 *: Halle la adjunta y la inversa de la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & -i & i \\ i & 1 & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución : Calculamos los cofactores

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} i & 0 \\ -i & 1 \end{vmatrix} = -i \qquad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} i & 1 \\ -i & 0 \end{vmatrix} = i$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -i & i \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = i \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -i \\ -i & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -i & i \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -i \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & i \\ i & 0 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{vmatrix} = 0$$

la matriz de cofactores es

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -i & i \\ i & 0 & -1 \\ -i & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

así, la matriz adjunta es

$$\operatorname{Adj}(A) = B^t = \begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ -i & 0 & -1 \\ i & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de A

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -i & i \\ i & 1 & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{vmatrix} = a_{21}\ A_{21} + a_{22}\ A_{22} + a_{23}\ A_{23} = (i)\, A_{21} + (1)\, A_{22} + (0)\, A_{23}$$

$$= (i)\,(i) + (1)\,(0) + (0)\,(-1) = i^2 = -1 \neq 0$$

luego, A es invertible y su inversa viene dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\operatorname{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -1 & -i & i \\ i & 0 & 1 \\ -i & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

★

Ejemplo 60 *: Sea A una matriz cuadrada $n \times n$. Demostrar que si A es invertible y $AB = O$, para alguna matriz $n \times n$, B, entonces $B = O$.*

Demostración : Como A es invertible, existe A^{-1}, por lo tanto, multiplicamos por la izquierda por la inversa a la ecuación $AB = O$ y obtenemos

$$AB = O \quad \Longrightarrow \quad A^{-1}AB = A^{-1}O \quad \Longrightarrow \quad IB = O \quad \Longrightarrow \quad B = O.$$

★

Ejemplo 61 *: **a.** Para cada una de las dos matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

emplear operaciones elementales sobre las filas para determinar cuando es invertible y encontrar la inversa en caso de que lo sea.

***b.** Hallar la inversa de AB, si es que existe.*

Solución : a. Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz $(A \mid I)$ para transformar dicha matriz en su forma escalonada reducida.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}F_1 \to F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-6F_1 + F_3 \to F_3]{-4F_1 + F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & 4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & 4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_2+F_3\to F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Por lo tanto, la matriz A **NO** tiene inversa.

Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz $(B \mid I)$ para transformar dicha matriz en su forma escalonada reducida.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-3F_1+F_2\to F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2\leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-5F_2+F_3\to F_3]{F_2+F_1\to F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -3 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{8}F_3\to F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{2F_3+F_2\to F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \end{array}\right),$$

así, la matriz B tiene inversa, la cual viene dada por

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \end{pmatrix}.$$

b. Multiplicamos las matrices A y B.

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 7 & 26 \\ 1 & -4 & 0 \\ 18 & 3 & 26 \end{pmatrix}$$

Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz $(AB \mid I)$ para transformar dicha matriz en su forma escalonada reducida.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 17 & 7 & 26 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 18 & 3 & 26 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_1-F_2+F_3\to F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 17 & 7 & 26 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right),$$

por lo tanto, la matriz AB **NO** tiene inversa. ★

Ejemplo 62 *: Sea* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. *Hallar el valor de* c, *tal que* $|A - cI| = 0$

Solución : Tenemos que

$$A - cI = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} - c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-c & 1 & 2 \\ 0 & -5-c & 1 \\ 0 & 0 & 7-c \end{pmatrix}$$

así,

$$0 = |A - cI| = \begin{vmatrix} 1-c & 1 & 2 \\ 0 & -5-c & 1 \\ 0 & 0 & 7-c \end{vmatrix} = (1-c)(-5-c)(7-c).$$

Luego, $c \in \{-5, 1, 7\}$. ★

Ejemplo 63 *: Se sabe que*

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 1$$

Calcular, usando propiedades de determinantes

$$\begin{vmatrix} 2a & d & g \\ 2c-6a & f-3d & i-3g \\ 6b & 3e & 3h \end{vmatrix}.$$

Solución : Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

para transformar dicha matriz en la matriz equivalente

$$B = \begin{pmatrix} 2a & d & g \\ 2c-6a & f-3d & i-3g \\ 6b & 3e & 3h \end{pmatrix},$$

así,

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \xrightarrow{2F_1 \to F_1} \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Transpuesta}} \begin{pmatrix} 2a & d & g \\ 2b & e & h \\ 2c & f & i \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 2a & d & g \\ 2c & f & i \\ 2b & e & h \end{pmatrix} \xrightarrow{-3F_1+F_2 \to F_2} \begin{pmatrix} 2a & d & g \\ 2c-6a & f-3d & i-3g \\ 2b & e & h \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{3F_3 \to F_3} \begin{pmatrix} 2a & d & g \\ 2c-6a & f-3d & i-3g \\ 6b & 3e & 3h \end{pmatrix},$$

entonces

$$\begin{vmatrix} 2a & d & g \\ 2c-6a & f-3d & i-3g \\ 6b & 3e & 3h \end{vmatrix} = (2)(-1)(3) \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (2)(-1)(3)(1) = -6$$

★

Ejemplo 64 *: Hallar, usando determinante, los valores de* α *para los cuales la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & -1 & \alpha+3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2-\alpha & \alpha+3 & \alpha+7 \end{pmatrix}$$

no es invertible

Solución : Calculamos el determinante de $|A|$ usando cofactores

$$|A| = \begin{vmatrix} -\alpha & -1 & \alpha+3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2-\alpha & \alpha+3 & \alpha+7 \end{vmatrix} = (-\alpha) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ \alpha+3 & \alpha+7 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2-\alpha & \alpha+7 \end{vmatrix}$$

$$+ (\alpha+3) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2-\alpha & \alpha+3 \end{vmatrix}$$

$$= -\alpha (2\alpha + 14 - \alpha - 9) + (\alpha + 7 - 6 + 3\alpha) + (\alpha+3)(\alpha + 3 - 4 + 2\alpha)$$

$$= -\alpha (\alpha+5) + (4\alpha+1) + (\alpha+3)(3\alpha-1) = 4\alpha^2 + 7\alpha - 2,$$

luego,

$$|A| = 4\alpha^2 + 7\alpha - 2,$$

entonces la matriz A no es invertible si $|A| = 0$, de aquí ,

$$4\alpha^2 + 7\alpha - 2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = 2 \quad \text{y} \quad \alpha = \frac{1}{4}.$$

Por lo tanto, la matriz A es no invertible si $\alpha \in \left\{ \frac{1}{4}, 2 \right\}$ ★

Ejemplo 65 *: Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justifique todas sus respuestas.*

1. *Si* A *es una matriz antisimétrica* $n \times n$, *con* n *impar, entonces* $|A| = 0$.
2. *Si* A *es antisimétrica y ortogonal* $n \times n$, *entonces* $|A| = \pm 1$, *para todo número* n *entero positivo.*
3. *Si* A *es una matriz invertible* $n \times n$, *entonces* $|\mathrm{Adj}\,(A)| = |A|^{n-1}$.
4. *Si* A *es una matriz invertible* $n \times n$, *entonces* $(\mathrm{Adj}\,(A))^{-1} = \mathrm{Adj}\left(A^{-1}\right)$.
5. *Si* A *es una matriz simétrica cualquiera, entonces* A^2 *también lo es.*
6. *Sea* A *una matriz* $n \times n$ *invertible y* x *un* $n-$*vector columna. Entonces, el sistema* $A^t x = 0$ *tiene infinitas soluciones.*

Solución :

1. Si A es una matriz antisimétrica, entonces se cumple $A = -A^t$, así,
$$|A| = \left|-A^t\right| \qquad \Longrightarrow \qquad |A| = (-1)^n |A|,$$
como n es impar, se tiene
$$|A| = -|A| \qquad \Longrightarrow \qquad 2|A| = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad |A| = 0 \qquad \leftarrow \qquad \textbf{Verdadera.}$$

2. Si A es antisimétrica, entonces, $A = -A^t$, por otra parte, si A es ortogonal, entonces $A^t A = I$, así,
$$A = -A^t \qquad \Longrightarrow \qquad A^t A = -A^t A^t \qquad \Longrightarrow \qquad I = -A^t A^t,$$
calculamos el determinante
$$|I| = \left|-A^t A^t\right| \qquad \Longrightarrow \qquad 1 = (-1)^n \left|A^t\right| \left|A^t\right| \qquad \Longrightarrow \qquad 1 = (-1)^n |A| |A| \qquad \Longrightarrow \qquad (-1)^n = |A|^2,$$
de aquí, $|A| \neq \pm 1 \qquad \leftarrow \qquad$ **Falsa**.

3. Como A es una matriz invertible, entonces
$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{Adj}\,(A),$$
así,
$$|A|\, A^{-1} = \mathrm{Adj}\,(A),$$
calculamos el determinante
$$|\mathrm{Adj}\,(A)| = \left||A|\, A^{-1}\right| \qquad \Longrightarrow \qquad |\mathrm{Adj}\,(A)| = |A|^n \left|A^{-1}\right| \qquad \Longrightarrow \qquad |\mathrm{Adj}\,(A)| = |A|^n \frac{1}{|A|},$$
es decir,
$$|\mathrm{Adj}\,(A)| = |A|^{n-1} \qquad \leftarrow \qquad \textbf{Verdadera.}$$

4. Tenemos que
$$(\mathrm{Adj}\,(A))^{-1} (\mathrm{Adj}\,(A)) = I \qquad \Longrightarrow \qquad (\mathrm{Adj}\,(A))^{-1}\ |A|\ A^{-1} = I,$$
de aquí,
$$(\mathrm{Adj}\,(A))^{-1} = \frac{1}{|A|}\ \left(A^{-1}\right)^{-1} \qquad \Longrightarrow \qquad (\mathrm{Adj}\,(A))^{-1} = \left|A^{-1}\right|\ \left(A^{-1}\right)^{-1} = \mathrm{Adj}\left(A^{-1}\right),$$
es decir,
$$(\mathrm{Adj}\,(A))^{-1} = \mathrm{Adj}\left(A^{-1}\right) \qquad \leftarrow \qquad \textbf{Verdadera.}$$

5. Por definición, $A = A^t$, así,
$$A^2 = AA = A^t A^t = (AA)^t = \left(A^2\right)^t$$
Por lo tanto, la proposición es **Verdadera.**

6. Si A es invertible, entonces A^t también lo es, así, el sistema $A^t x = 0$ es equivalente a $x = \left(A^t\right)^{-1} 0 = 0$, es decir, el sistema tiene unicamente la solución trivial.

   Por lo tanto, la proposición es **Falsa**. ★

Ejemplo 66 *: Seleccionar la letra correspondiente a la única alternativa correcta. Justifique su respuesta.*

1. *Dadas las matrices* $A_{2\times 3}$, $B_{2\times 3}$, $C_{3\times 4}$ *y* $D_{2\times 4}$, *sólo tiene sentido*

   a. $(B + A) D + C$ *b.* $(D + AC) B$ *c.* $(D + BC) A$ *d.* $D + (B + A) C$

2. *Sean las rectas* $L : ax + by = e$ *y* $R : cx + dy = f$ *y el sistema*
$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases},$$
   entonces

   (a) Si $ad = bc$, *entonces necesariamente hay infinitas soluciones.*
   (b) Si $ad = bc$, *entonces necesariamente no hay solución.*
   (c) Si $ad \neq bc$, *entonces las rectas no son paralelas.*
   (d) Si $ad \neq bc$, *entonces las rectas son paralelas.*

3. *Si* y *y* z *son soluciones del sistema* $Ax = b$, *entonces*

   a. $y + z$ *es solución de* $Ax = b$ *b.* $y - z$ *es solución de* $Ax = 0$

   c. $y - z$ *es solución de* $Ax = b$ *d.* $y + z$ *es solución de* $Ax = 0$

Solución : 1 **d**, 2 **c**, 3 **b** ★

Ejercicios

1. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar $B = A^{-1}\left(A + A^2 + A^3\right)$.

2. Sea la matriz $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Demostrar que $B^{-1} = B$.

3. Determine, en caso que exista, la matriz inversa de cada una de las siguientes matrices

   1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 2. $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 3. $C = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ 6. $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

7. $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R}$ 8. $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

4. Hallar la inversa de la matriz $A_{3\times3}$ cuyos elementos se calculan mediante la expresión

$$a_{ij} = \frac{2160}{i+j-1}$$

5. Sea

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Demostrar, usando operaciones elementales de fila, que A es invertible si y solo si $ad - bc \neq 0$.

6. Determinar si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

es invertible y hallar A^{-1}, si existe.

7. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & i \\ 1 & -3 & -i \\ i & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar una matriz escalón reducida por filas R que sea equivalente a A y una matriz invertible $P_{3\times3}$, tal que $R = PA$.

8. Hallar los valores de α para los cuales la matriz $A = \begin{pmatrix} -\alpha & -1 & \alpha+3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2-\alpha & \alpha+3 & \alpha+7 \end{pmatrix}$ no sea invertible.

9. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & a \\ 1 & 0 & 0 \\ x & y & -2 \end{pmatrix}$ invertible. Si $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & a & x \\ -2 & 2 & b \\ -1 & y & -1 \end{pmatrix}$, hallar los valores de a, b, x e y.

10. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

¿Para qué valor(es) de x existe un escalar c, tal que $Ax = cx$?

11. Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones matriciales

1. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}$ 2. $X \begin{pmatrix} 12 & 13 \\ 14 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & -17 \\ 20 & 21 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -10 & -6 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

12. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

a. Hallar la inversa de A.

b. Hallar $(A^t)^{-1}$.

13. Calcule el determinante de las siguientes matrices

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ 2. $P = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & x \\ x & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 3. $Q = \begin{pmatrix} x & 0 & -x \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x^2 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 5. $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

6. $A = \begin{pmatrix} 1+a & b & c & d \\ a & 1+b & c & d \\ a & b & 1+c & d \\ a & b & c & 1+d \end{pmatrix}$

14. Sean A, B y C las matrices definidas por

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} - \dfrac{4}{3}\,t & \dfrac{1}{3} - \dfrac{5}{3}\,t & t \\ -\dfrac{1}{3} - \dfrac{4}{3}\,s & \dfrac{1}{3} - \dfrac{5}{3}\,s & s \end{pmatrix}, \quad \text{con } t, s \in \mathbb{R}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Calcule el determinante de ABC.

15. Hallar el valor de c, tal que $|A - cI| = 0$, para las siguientes matrices A.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -5 & -3 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$ 3. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

16. Utilizando las propiedades de los determinantes, calcule el valor de

$$\begin{vmatrix} x & x+1 & x+3 \\ x & x+3 & x+5 \\ x & x+5 & x+7 \end{vmatrix}$$

17. Demuestre que

1. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix}.$

18. Si $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 2,$ calcular

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{11}+a_{13} & a_{21}+a_{23} & a_{31}+a_{33} & a_{41}+a_{43} \\ 3a_{12} & 3a_{22} & 3a_{32} & 3a_{42} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

19. Sabiendo que $\begin{pmatrix} a & b & c \\ k & m & n \\ x & y & z \end{pmatrix} = AB,$ con $|A| = 3$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 8 & -1 \end{pmatrix},$ calcular

$$\begin{vmatrix} c & 2n & z \\ b & 2m & y \\ a+b & 2k+2m & x+y \end{vmatrix}.$$

20. Calcular

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}.$$

21. Usando solo propiedades de los determinantes y el hecho que la matriz A cuyas filas 1, 2 y 3 son (x, y, z), $(3, 0, 2)$ y $(1, 1, 1)$, respectivamente, es tal que $|A| = 1$, calcular el determinante de la matriz

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2x & 2y & 2z \\ 5 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

22. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} & 3c \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ a & b & -3c \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{2} & -2c \\ \frac{1}{2} & 2 & 4 \\ a & b & 5c \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} & 3c \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & \frac{b}{2} & -6c \end{pmatrix}$$

Calcular: a. $|A+B|$; b. $|A-B|$; c. $|2A-C|$ si $|A| = 1$.

23. Use la expresión de la adjunta para calcular la inversa de la matriz $Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$.

24. Halle la adjunta y la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -i & i \\ i & 1 & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

25. Hallar, usando determinante, los valores de α para los cuales la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha-3 & 0 \\ \alpha & 4 & \alpha+1 \\ 0 & 1 & \alpha+3 \end{pmatrix}$ no es invertible.

26. Hallar, usando determinante, los valores de α para los cuales la matriz $A = \begin{pmatrix} -\alpha & 3 & \alpha \\ -1 & \alpha-2 & -1 \\ 3 & 3 & \alpha+3 \end{pmatrix}$ no es invertible.

27. ¿Para qué valores de k, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & k \end{pmatrix}$$

tiene inversa?

28. Sea A una matriz $n \times n$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} x_1+1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2+1 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3+1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n+1 \end{pmatrix}$$

Demuestre que $|A| = 1 + x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$.

29. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Encuentre

(a) La inversa y el determinante de A.

(b) La solución de la ecuación $XA = B$, donde

$$X = \begin{pmatrix} x & y & z & t \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 19 & 12 & 17 & 14 \end{pmatrix}.$$

(c) El determinante de la matriz $\left(X^t X\right)^2$.

30. Demuestre que la matriz
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & k & -k-2 \\ 3k & 3k & 3k & 6-3k \\ k+1 & k-1 & 2k & -2k \\ k^2 & k^4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
es singular para cualquier valor de k real.

31. Determinar si las siguientes proposiciones son **VERDADERA** ó **FALSA**. Justificar todas sus respuestas

(a) Si A es una matriz antisimétrica $n \times n$, con n impar, entonces $|A| = 0$.

(b) Si A es antisimétrica y ortogonal $n \times n$, entonces $|A| = \pm 1$, para todo número n entero positivo.

(c) Sea A una matriz cuadrada $n \times n$, tal que el sistema $Ax = b$ tiene tres soluciones diferentes. Entonces, $Ax = 0$ tiene infinitas soluciones.

(d) Sea A una matriz cuadrada $n \times n$, tal que $A^2 = 3A - I$, entonces $A^3 = 3A - I$.

(e) Sean A, B y C matrices cuadradas $n \times n$, si C y B son simétricas e invertibles, entonces la matriz $C^t + B^{-1}A^tC^{-1}$ es simétrica.

(f) Si A es una matriz invertible $n \times n$, entonces $|\text{Adj}\,(A)| = |A|^{n-1}$.

(g) Si A es una matriz invertible $n \times n$, entonces $(\text{Adj}\,(A))^{-1} = \text{Adj}\left(A^{-1}\right)$.

(h) Si A es una matriz $n \times n$ e I_n la matriz identidad $n \times n$. Entonces $|A + I_n|^2 = |A|^2 + 2\,|A| + I_n$.

(i) Sean A, B y C matrices $n \times n$, tales que $|A| = 2$, $|C| = 3$ y B se obtiene de A intercambiando las filas 1 y 3. Entonces $\left|A^tBC^{-1}\right| = -\dfrac{4}{3}$.

(j) Sea A una matriz $n \times n$ no invertible, entonces $A\text{Adj}\,(A)$ es invertible.

(k) Sea A una matriz cuadrada de orden n. Si A es invertible y $A^{-1} = A^t$, entonces para cada matriz B cuadrada de orden n se cumple que $\left((AB)^t A^{-1}\right)^t = A^2B$.

(l) Si A, B y C son matrices $n \times n$, tales que $A^2 = B - C$, entonces $|A|^2 = |B| - |C|$.

(m) Para cualquier par de matrices A y B $n \times n$, se tiene que $|AB| = |BA|$.

(n) Sea A una matriz cuadrada de orden n, invertible, entonces todos los menores de A son invertibles.

(o) Sea A, B y C matrices cuadradas $n \times n$, con B invertible, $det\,(A) = \dfrac{1}{4}$, $det\,(C) = \dfrac{1}{3}$ y $\left(C^2A^{-1}B^{-1}\right)^t B^{-1} = I$. Entonces $(det\,(B))^2 = \dfrac{4}{9}$.

(p) El elemento a_{32} de la adjunta de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & i & -i \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es -2.

(q) Sean A y B matrices cuadradas de orden n, tales que $AA^t = B$, entonces $|B| \geq 0$.

(r) Si A una matriz cuadrada de orden n, entonces $|kA| = k\,|A|$, con k un escalar cualquiera.

(s) Si $|A| = |B|$, entonces $AB = BA$.

32. Seleccionar la letra correspondiente a la única alternativa correcta. Justifique todas sus respuestas.

1 Considerar las proposiciones

i. Si a, b y c son $n-$vectores, tales que $a \cdot b = a \cdot c$, entonces $b = c$.

ii. Si a y b son $n-$vectores, tales que $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ o bien $b = 0$, o bien ambos son nulos.

iii. La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es escalonada reducida por filas.

Entonces, son ciertas

a. Sólo i   *b.* Sólo ii   *c.* i y ii   *d.* i y iii

2 La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a. Es invertible y escalonada   *b.* No es invertible y no es escalonada

c. Es invertible y no es escalonada   *d.* No es invertible y es escalonada

3 La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es

a. Singular si $a = b = 2$ *b.* Escalonada reducida por filas si $a = 0$ y $b \neq 0$

c. Invertible   *d.* Escalonada reducida por filas si $a \neq 0$ y $b = 0$

4 ¿Cuál de las siguientes proposiciones es cierta?

i. $|AB| = |BA|$ para A y B de tamaño $n \times n$.

ii. Si A, B y C son de tamaño $n \times n$, tales que $AB = AC$, entonces $B = C$.

iii. Si A es antisimétrica $n \times n$, entonces $|A| = 0$, para todo n.

iv. No existen matrices A y B de tamaño $n \times n$, tales que $|A + B| = |A| + |B|$.

5 Sean A y B $n \times n$. Considere las proposiciones

i. Si A es equivalente por filas a la identidad, entonces $A\mathrm{Adj}\,(A) = 0$.

ii. $|A\mathrm{Adj}\,(A)| = |A|^n$.

iii. $|A + B| = |A| + |B|$.

Entonces, es cierta

a. Sólo i   *b.* i y iii   *c.* Sólo ii   *d.* ii y iii

6 Dado el sistema $Ax = b_0$, donde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $b_0 = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$, con A invertible, entonces

a. $y = \dfrac{ad - bc}{af - ec}$ *b.* $x = \dfrac{ad - bc}{cd - bf}$ *c.* $y = \dfrac{af - ec}{ad - bc}$ *d.* $x = \dfrac{bf - ed}{ad - bc}$

7 Si A es $n \times n$ invertible, tal que $A^2 = A$, entonces $|A|$ es igual a

a. -1 *b.* 1 *c.* 0 *d.* 2

8 Si A es el producto de matrices elementales, entonces

a El sistema $Ax = b$ tiene infinitas soluciones.

b $|\mathrm{Adj}\,(A)| \neq 0$.

c $|A| = 0$.

d $|\mathrm{Adj}\,(A)| = 0$.

9 Si $A_{n\times n}$ es invertible, entonces

a. $|\text{Adj}\,(A)| = |A|$ *b.* $|\text{Adj}\,(A)| = |A|^{1-n}$

c. $|\text{Adj}\,(A)| = |A|^{-1}$ *d.* $|\text{Adj}\,(A)| = |A|^{n-1}$

10 Sea P ortogonal e I la identidad. Entonces, ¿cuál matriz es ortogonal?

a. $2P$ *b.* P^2 *c.* $P+I$ *d.* $P-I$

11 Sean A y B matrices $n\times n$. Se puede asegurar que

a. $|A+B| > |A| + |B|$ *b.* $\left|(AB)^t\right| = \left|(BA)^t\right|$

c. $|cA| \leq c\,|A|$, para todo número real c. *d.* $|B^t| = |B|$, si y solo si B es simétrica.

33. Colocar en la columna de la izquierda la única letra correspondiente de la columna de la derecha. Justificar todas sus respuestas.

( ) A es 3×3	*a)* C no es invertible
( ) C es antisimétrica 3×3	*b)* $\|B\| = 4$
( ) $B = E_{ij}\,(4)$	*c)* $\|5A\| = 125\,\|A\|$
	d) $\|B\| = 1$
	e) $\|A^t\| = \|B^t\|$
	f) $\|5A\| = 5\,\|A\|$
	g) $A = B$
	h) $\|C\| \neq 0$

Respuestas: Ejercicios

1. $B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 13 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$; 3.1. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; 3.2. $D^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$;

3.3. $C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & 1 & -\frac{1}{4} \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; 3.4. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 11 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$; 3.5. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{23} & \frac{9}{23} & \frac{1}{23} \\ \frac{4}{23} & -\frac{6}{23} & \frac{7}{23} \\ \frac{7}{23} & \frac{1}{23} & -\frac{5}{23} \end{pmatrix}$;

3.6. $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$; 3.7. $A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$; 3.8. $C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

4. $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{240} & -\frac{1}{60} & \frac{1}{72} \\ -\frac{1}{60} & \frac{4}{45} & -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{72} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$; 6. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$;

7. $R = I$ y $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{30} - \frac{1}{10}i & \frac{1}{10} - \frac{3}{10}i \\ 0 & -\frac{3}{10} - \frac{1}{10}i & \frac{1}{10} - \frac{3}{10}i \\ -\frac{1}{3}i & \frac{1}{5} + \frac{1}{15}i & \frac{3}{5} + \frac{1}{5}i \end{pmatrix}$; 8. -2 y $\frac{1}{4}$; 9. $a = 1$, $b = -1$, $x = 0$, y $y = 1$;

10. $c = 5$ y $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; 11.1. No tiene solución; 11.2. $X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$; 11.3. $X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -6 \\ 2 & -\frac{1}{6} & \frac{14}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}$;

12.a. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 12.$b$. $\left(A^t\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$; 13.1. 0; 13.2. $x^3 + 1$; 13.3. $x + x^3$;

13.4. 0; 13.5. -72; 13.6. $a + b + c + d + 1$; 14. 4; 15.1. $c \in \{2, -3, 1\}$; 15.2. $c \in \left\{ \frac{1-\sqrt{33}}{2}, \frac{1+\sqrt{33}}{2} \right\}$;

15.3. $c \in \{3, -i, i\}$; 16. 0; 18. -6; 19. -12; 20. $a(b-a)(c-b)(d-c)$; 21. -2;

22.a. 0; 22.b. $16ac$; 22.c. 1; 23. Adjunta : $\operatorname{Adj}(Q) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$, $Q^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$;

24. Adjunta : $\operatorname{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ -i & 0 & -1 \\ i & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -i & i \\ i & 0 & 1 \\ -i & 1 & 0 \end{pmatrix}$; 25. $\alpha \in \left\{-2, 2\sqrt{3}+1, 1-2\sqrt{3}\right\}$;

26. $\alpha \in \left\{0, \sqrt{13}-2, -\sqrt{13}-2\right\}$; 27. $k = 11$; 29.a. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ y $|A| = -1$;

29.b. $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; 29.$c$. $\left(X^t X\right)^2 = \begin{pmatrix} 30 & 60 & 90 & 120 \\ 60 & 120 & 180 & 240 \\ 90 & 180 & 270 & 360 \\ 120 & 240 & 360 & 480 \end{pmatrix}$; 31.$a$. Verdadero; 31.$b$. Falso;

31.c. Verdadero; 31.d. Falso; 31.e. Falso; 31.f. Verdadero; 31.g. Verdadero; 31.h. Falso;

31.i. Verdadero; 31.j. Falso; 31.k. Verdadero; 31.l. Falso; 31.m. Verdadero; 31.n. Falso;

31.o. Verdadero; 31.p. Falso; 31.q. Verdadero; 31.r. Falso; 31.s. Falso; 33. c, a, b;

Bibliografía

1. **Grossman, Staley I.**: "*Álgebra lineal*". Quinta edición. Mc Graw Hill.
2. **Kolman, B. y Hill, D. R.**: "*Álgebra lineal*". Octava edición. PEARSON Prentice Hall.
3. **Rangel, J., y otros**: "*Problemario de álgebra lineal*". Universidad Metropolitana. 1997.
4. **Anton, H. - Rorres, C.**: "*Elementary linear algebra. Applications version*". Six Edition. WILEY.

Este material ha sido revisado recientemente, pero esto no garantiza que esté libre de errores, por esa razón se agradece reportar cualquier error que usted encuentre en este material enviando un mensaje al correo electrónico

farith.math@gmail.com

indicando donde se encuentra(n) dicho(s) error(es). **MUCHAS GRACIAS**.

Matemática III - Guía 4

Vectores en $\mathbb{R}^n$ y en $\mathbb{C}^n$.

Objetivos a cubrir

Código : MAT-3.04

- Vectores en $\mathbb{R}^n$ y en $\mathbb{C}^n$. Operaciones entre vectores.
- Producto escalar entre vectores de $\mathbb{R}^n$ y de $\mathbb{C}^n$. Ángulo entre vectores.
- Producto entre vectores. Proyecciones.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 67 *: Halle los valores de las constantes α y β para que los vectores*

$$\boldsymbol{a} = \left(\alpha\beta, 4\beta - 1, 4\alpha^3 - 6\alpha^2\right) \qquad y \qquad \boldsymbol{b} = \left(1, 5\beta^2, \alpha^4 - 4\alpha + 5\right)$$

sean iguales.

Solución : Observemos que los dos vectores tienen la misma cantidad de componentes, 3 componentes. Además para que sean iguales se debe cumplir

$$1^{\text{ra}} \text{ componente} \qquad \alpha\beta = 1$$

$$2^{\text{da}} \text{ componente} \qquad 4\beta - 1 = 5\beta^2 \quad \Longrightarrow \quad 5\beta^2 - 4\beta + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\beta = \frac{2 \pm i}{5}}$$

$$3^{\text{ra}} \text{ componente} \qquad 4\alpha^3 - 6\alpha^2 = \alpha^4 - 4\alpha + 5 \quad \Longrightarrow \quad \alpha^4 - 4\alpha^3 + 6\alpha^2 - 4\alpha + 5 = 0$$

De la ecuación de la primera componente tenemos, si $\beta = \dfrac{2+i}{5}$, que

$$\alpha\beta = 1 \quad \Longrightarrow \quad \alpha\left(\frac{2+i}{5}\right) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 2 - i,$$

mientras que, para $\beta = \dfrac{2-i}{5}$, se tiene que

$$\alpha\beta = 1 \quad \Longrightarrow \quad \alpha\left(\frac{2-i}{5}\right) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 2 + i,$$

por último, al sustituir estos valores en la ecuación de la tercera componente, se cumple la igualdad, por lo tanto, dicha ecuación también se satisface, luego los valores buscados son

$$\boxed{\beta = \frac{2+i}{5}, \qquad \alpha = 2 - i} \qquad \text{y} \qquad \boxed{\beta = \frac{2-i}{5}, \qquad \alpha = 2 + i}$$

★

Ejemplo 68 *: Sean $\boldsymbol{a} = \left(\dfrac{3}{2}, -2, \pi, 4\right)$ y $k = -2$, hallar $k\boldsymbol{a}$.*

Solución : Tenemos que

$$k\boldsymbol{a} = -2\left(\frac{3}{2}, -2, \pi, 4\right) = \left(-3, 4, -2\pi, -8\right),$$

luego, el vector múltiplo escalar de $\boldsymbol{a}$, para $k = -2$, viene dado por

$$\boldsymbol{b} = (-3, 4, -2\pi, -8)$$

★

Ejemplo 69 *: Sean* $\boldsymbol{a} = (-2, 5)$ *y* $\boldsymbol{b} = (-3, 0)$*. Hallar* $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$*.*

Solución : Tenemos que

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (-2, 5) + (-3, 0) = (-2 + (-3), 5 + 0) = (-5, 5),$$

luego, el vector suma de los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, viene dado por

$$\boldsymbol{c} = (-5, 5)$$

★

Ejemplo 70 *: Sean* $\boldsymbol{u} = \left(-3, -2, 1, \frac{2}{5}\right)$ *y* $\boldsymbol{v} = \left(-5, \frac{3}{2}, 2i, 3\right)$*. Hallar* $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$*.*

Solución : Tenemos que

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} &= \left(-5, \frac{3}{2}, 2i, 3\right) - \left(-3, -2, 1, \frac{2}{5}\right) = \left(-5 - (-3), \frac{3}{2} - (-2), 2i - (1), 3 - \left(\frac{2}{5}\right)\right) \\ &= \left(-5 + 3, \frac{3}{2} + 2, 2i - 1, 3 - \frac{2}{5}\right) = \left(-2, \frac{7}{2}, -1 + 2i, \frac{13}{5}\right),\end{aligned}$$

luego, el vector obtenido de la resta de los vectores $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{u}$, viene dado por

$$\boldsymbol{w} = \left(-2, \frac{7}{2}, -1 + 2i, \frac{13}{5}\right).$$

★

Ejemplo 71 *: Sean* $\boldsymbol{a} = (-2, 1, 5, -3)$ *y* $\boldsymbol{b} = (4, -3, 0, -1)$*. Hallar el producto escalar entre* $\boldsymbol{a}$ *y* $\boldsymbol{b}$

Solución : Tenemos que

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (-2, 1, 5, -3) \cdot (4, -3, 0, -1) = (-2)(4) + (1)(-3) + (5)(0) + (-3)(-1) = -8 - 3 + 0 + 3 = -8,$$

luego,

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = -8.$$

★

Ejemplo 72 *: Dados los vectores* $\boldsymbol{u} = (-1, 3)$*,* $\boldsymbol{v} = (-2, -1)$*,* $\boldsymbol{w} = (1, 2)$*,* $\boldsymbol{p} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$*. Hallar*

1. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{u} + 3\boldsymbol{v} - 4\boldsymbol{w}$
2. $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{p} - 4\boldsymbol{w} + 6\boldsymbol{u}$
3. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{p} - \frac{1}{4}\boldsymbol{u} - \frac{3}{2}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$
4. $\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{u}|\,\boldsymbol{u} - 4\boldsymbol{p} - |\boldsymbol{v}|\,\boldsymbol{w}$

Solución : 1. Tenemos que

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{u} + 3\boldsymbol{v} - 4\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + 3\boldsymbol{v} + (-4)\,\boldsymbol{w},$$

donde,

$$3\boldsymbol{v} = 3(-2, -1) = ((3)(-2), (3)(-1)) = (-6, -3),$$

mientras que,

$$(-4)\,\boldsymbol{w} = -4(1, 2) = ((-4)(1), (-4)(2)) = (-4, -8),$$

así,

$$\boldsymbol{u} + 3\boldsymbol{v} - 4\boldsymbol{w} = (-1, 3) + (-6, -3) + (-4, -8) = (-1 + (-6) + (-4), 3 + (-3) + (-8)) = (-11, -8).$$

Luego, $\boldsymbol{a} = (-11, -8)$.

2. Tenemos que

$$\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{p} - 4\boldsymbol{w} + 6\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{p} + (-4)\,\boldsymbol{w} + 6\boldsymbol{u},$$

donde,

$$2\boldsymbol{p} = 2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = \left((2)\left(\frac{1}{2}\right), (2)\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \left(1, \frac{2}{3}\right),$$

mientras que,

$$(-4)\,\boldsymbol{w} = -4\,(1,2) = ((-4)\,(1)\,, (-4)\,(2)) = (-4, -8)$$

y

$$6\boldsymbol{u} = 6\,(-1,3) = ((6)\,(-1)\,, (6)\,(3)) = (-6, 18)\,,$$

así,

$$2\boldsymbol{p} = 2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = \left(1, \frac{2}{3}\right) + (-4,-8) + (-6,18) = \left((1) + (-4) + (-6)\,, \left(\frac{2}{3}\right) + (-8) + (18)\right) = \left(-9, \frac{32}{3}\right).$$

Luego, $\boldsymbol{a} = \left(-9, \dfrac{32}{3}\right)$.

3. Tenemos que

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{p} - \frac{1}{4}\boldsymbol{u} - \frac{3}{2}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} = \boldsymbol{p} + \left(-\frac{1}{4}\right)\boldsymbol{u} + \left(-\frac{3}{2}\right)\boldsymbol{v} + (-1)\,\boldsymbol{w},$$

donde,

$$\left(-\frac{1}{4}\right)\boldsymbol{u} = -\frac{1}{4}\,(-1,3) = \left(\left(-\frac{1}{4}\right)(-1)\,, \left(-\frac{1}{4}\right)(3)\right) = \left(\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\right),$$

mientras que,

$$\left(-\frac{3}{2}\right)\boldsymbol{v} = -\frac{3}{2}\,(-2,-1) = \left(\left(-\frac{3}{2}\right)(-2)\,, \left(-\frac{3}{2}\right)(-1)\right) = \left(3, \frac{3}{2}\right)$$

y

$$(-1)\,\boldsymbol{w} = -\,(1,2) = ((-1)\,(1)\,, (-1)\,(2)) = (-1, -2)\,,$$

así,

$$\boldsymbol{p} - \frac{1}{4}\boldsymbol{u} - \frac{3}{2}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\right) + \left(3, \frac{3}{2}\right) + (-1,-2) = \left(\frac{11}{4}, -\frac{11}{12}\right).$$

Luego, $\boldsymbol{a} = \left(\dfrac{11}{4}, -\dfrac{11}{12}\right)$.

4. Tenemos que

$$\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{u}|\,\boldsymbol{u} - 4\boldsymbol{p} - |\boldsymbol{v}|\,\boldsymbol{w} = |\boldsymbol{u}|\,\boldsymbol{u} + (-4)\,\boldsymbol{p} + (-\,|\boldsymbol{v}|)\,\boldsymbol{w},$$

donde,

$$|\boldsymbol{u}| = \sqrt{(-1)^2 + (3)^2} = \sqrt{10},$$

así,

$$|\boldsymbol{u}|\,\boldsymbol{u} = \sqrt{10}\,(-1,3) = \left(-\sqrt{10}, 3\sqrt{10}\right),$$

mientras que,

$$(-4)\,\boldsymbol{p} = -4\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = \left((-4)\left(\frac{1}{2}\right), (-4)\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \left(-2, -\frac{4}{3}\right),$$

por último,

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5},$$

con lo que,

$$(-|\boldsymbol{v}|)\,\boldsymbol{w} = -\sqrt{5}\,(1,2) = \left(\left(-\sqrt{5}\right)(1)\,,\left(-\sqrt{5}\right)(2)\right) = \left(-\sqrt{5},-2\sqrt{5}\right),$$

entonces,

$$\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{u}|\,\boldsymbol{u} - 4\boldsymbol{p} - |\boldsymbol{v}|\,\boldsymbol{w} = \left(-\sqrt{10},3\sqrt{10}\right) + \left(-2,-\frac{4}{3}\right) + \left(-\sqrt{5},-2\sqrt{5}\right)$$

$$= \left(-\sqrt{10}-2-\sqrt{5},3\sqrt{10}-\frac{4}{3}-2\sqrt{5}\right).$$

Luego, $\boldsymbol{a} = \left(-\sqrt{10}-2-\sqrt{5},3\sqrt{10}-\frac{4}{3}-2\sqrt{5}\right)$. ★

Ejemplo 73 *: Determine el valor de α para que los siguientes conjuntos de vectores sean ortogonales*

a. $\{(1,2)\,,\ (\alpha,5)\}$ *b.* $\{(1,2,-1)\,,\ (3,1,\alpha)\}$

Solución : *a.* Es conocido que dos vectores son ortogonales si su producto escalar es igual a cero, así,

$$(1,2)\cdot(\alpha,5)=0 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha+10=0 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha=-10.$$

b. Tenemos que

$$(1,2,-1)\cdot(3,1,\alpha)=0 \qquad \Longrightarrow \qquad 3+2-\alpha=0 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha=5.$$

★

Ejemplo 74 *: Demostrar que si $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$ es un vector arbitrario en $\mathbb{R}^3$, entonces*

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k},$$

donde, $\boldsymbol{i}=(1,0,0)$, $\boldsymbol{j}=(0,1,0)$ y $\boldsymbol{k}=(0,0,1)$ son los vectores canónicos de $\mathbb{R}^3$.

Demostración : Tenemos que

$$a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k} = a_1(1,0,0) + a_2(0,1,0) + a_3(0,0,1)$$

$$= (a_1,0,0) + (0,a_2,0) + (0,0,a_3) = (a_1,a_2,a_3) = \boldsymbol{a}.$$

Por lo tanto,

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}.$$

★

Ejemplo 75 *: Demuestre que si $\boldsymbol{v}=(a,b)$, un vector de $\mathbb{R}^2$ diferente de cero, entonces*

$$\boldsymbol{u} = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

*es un vector que tiene norma 1, el vector $\boldsymbol{u}$ se denomina **vector unitario**.*

Demostración : Tenemos que

$$|\boldsymbol{u}| = \sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}} = 1,$$

por lo que, el vector $\boldsymbol{u}$ es unitario y la dirección de $\boldsymbol{v}$ es

$$\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\,(a,b) = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = \boldsymbol{u}.$$

★

Ejemplo 76 *: Encuentre un vector unitario que tenga la misma dirección que* $(3, 1, -7)$. *Encuentre también un vector de longitud* 5 *orientado en la dirección opuesta.*

Solución : Normalizamos el vector, para ello calculamos la norma del vector dado

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{(3)^2 + (1)^2 + (-7)^2} = \sqrt{59},$$

así, el vector unitario es

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = \left(\frac{3}{\sqrt{59}}, \frac{1}{\sqrt{59}}, -\frac{7}{\sqrt{59}}\right).$$

El vector buscado es

$$\boldsymbol{a} = -5\left(\frac{3}{\sqrt{59}}, \frac{1}{\sqrt{59}}, -\frac{7}{\sqrt{59}}\right).$$

★

Ejemplo 77 *: Sean* $\boldsymbol{\alpha} = (1, 2)$, $\boldsymbol{\beta} = (-1, 1)$. *Si* $\boldsymbol{\gamma}$ *es un vector tal que* $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\gamma} = -1$ *y* $\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 3$. *Hallar* $\boldsymbol{\gamma}$.

Solución : Sea $\boldsymbol{\gamma} = (x, y)$, entonces se cumple que

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\gamma} = -1, & \text{es decir,} \qquad (1, 2) \cdot (x, y) = x + 2y = -1, \\ \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 3, & \text{es decir,} \qquad (-1, 1) \cdot (x, y) = -x + y = 3, \end{cases}$$

resolvemos el sistema

$$\begin{cases} x + 2y = -1 \\ -x + y = 3 \end{cases} \qquad \text{de aquí,} \qquad 3y = 2 \qquad \Longrightarrow \qquad y = \frac{2}{3},$$

con lo que,

$$x + 2\left(\frac{2}{3}\right) = -1 \qquad \Longrightarrow \qquad x + \frac{4}{3} = -1 \qquad \Longrightarrow \qquad x = -\frac{7}{3},$$

entonces

$$\boldsymbol{\gamma} = \left(-\frac{7}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

★

Ejemplo 78 *: Encuentre el ángulo comprendido entre los vectores* $(4, -3, -2)$ *y* $(-1, 2, 5)$.

Solución : Es conocido que

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \cos\theta,$$

de aquí,

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|},$$

donde,

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (4, -3, -2) \cdot (-1, 2, 5) = -20,$$

mientras que,

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(4)^2 + (-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{29} \qquad \text{y} \qquad |\boldsymbol{b}| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (5)^2} = \sqrt{30},$$

así,

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|} = \frac{-20}{\sqrt{29}\sqrt{30}} \qquad \Longrightarrow \qquad \theta = \arccos\left(\frac{-20}{\sqrt{29}\sqrt{30}}\right).$$

★

Ejemplo 79 *: Describa los vectores $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que son ortogonales al vector $(3, -1)$. Verifique que éstos son los puntos de una recta que pasa por el origen.*

Solución : Sea $\boldsymbol{v} = (x, y)$ los vectores genéricos que sean ortogonales al vector $\boldsymbol{a} = (3, -1)$, entonces

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a} = \mathbf{0} \qquad \Longrightarrow \qquad (x, y) \cdot (3, -1) = 3x - y = 0.$$

Luego, los vectores que son ortogonales al vector $\boldsymbol{a} = (3, -1)$, son de la forma $\boldsymbol{v} = (x, 3x)$, es decir, los de la forma $y = 3x$, lo cual representa una recta de pendiente 3 que pasa por el origen de coordenada. ★

Ejemplo 80 *: Si $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$. Demuestre que*

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad y \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

donde θ es la dirección de $\boldsymbol{v}$, es decir, θ es el ángulo director asociado a x.

Demostración : Sean θ y β los ángulos directores del vector $\boldsymbol{v} = (a, b)$ respecto a los vectores canónicos $\boldsymbol{i} = (1, 0)$ y $\boldsymbol{j} = (0, 1)$ respectivamente, entonces

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{i}}{|\boldsymbol{v}|\,|\boldsymbol{i}|} = \frac{(a, b) \cdot (1, 0)}{\sqrt{(a)^2 + (b)^2}\sqrt{(1)^2 + (0)^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

y

$$\cos\beta = \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{j}}{|\boldsymbol{v}|\,|\boldsymbol{j}|} = \frac{(a, b) \cdot (0, 1)}{\sqrt{(a)^2 + (b)^2}\sqrt{(0)^2 + (1)^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Puesto que los vectores canónicos son ortogonales, entonces

$$\theta + \beta = \frac{\pi}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \beta = \frac{\pi}{2} - \theta,$$

así,

$$\cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\theta + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}\theta = (0)\cos\theta + (1)\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta \qquad \Longrightarrow \qquad \cos\beta = \operatorname{sen}\theta,$$

luego

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

★

Ejemplo 81 *: Si $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}$. Encuentre $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$, donde θ es el ángulo director asociado al vector canónico $\boldsymbol{i}$.*

Solución : Del ejemplo 80

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{(2)^2 + (-3)^2}} = \frac{2}{\sqrt{13}} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{-3}{\sqrt{(2)^2 + (-3)^2}} = \frac{-3}{\sqrt{13}},$$

así,

$$\cos\theta = \frac{2\sqrt{13}}{13} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\theta = -\frac{3\sqrt{13}}{13}.$$

★

Ejemplo 82 *: Sea $\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$ un vector que parte del origen y apunta hacia el primer octante. Si $|\boldsymbol{u}| = 5$, encuentre c.*

Solución : De la condicón $|\boldsymbol{u}| = 5$, tenemos

$$|\boldsymbol{u}| = \sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (c)^2} = \sqrt{13 + c^2} = 5 \qquad \Longrightarrow \qquad 13 + c^2 = 25 \qquad \Longrightarrow \qquad c^2 = 12 \qquad \Longrightarrow \qquad c = \pm\sqrt{12}$$

como el vector $\boldsymbol{u}$ apunta hacia el primer octante, entonces $c = \sqrt{12}$. ★

Ejemplo 83 *: Responda* ***VERDADERO*** *ó* ***FALSO****. Justifique su respuesta*

Dos de los ángulos directores de cierto vector de $\mathbb{R}^3$ *son iguales a* $\dfrac{\pi}{4}$*, entonces, el tercer ángulo también es* $\dfrac{\pi}{4}$.

Solución : Es conocido que

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^3\gamma = 1,$$

donde, α, β y γ representan los ángulos directores de un vector en $\mathbb{R}^3$, puesto que, dos de ellos son iguales a $\dfrac{\pi}{4}$, supongamos que sean α y β, entonces,

$$\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 + \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 + \cos^2\gamma = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \cos^2\gamma = 1,$$

de aquí,

$$\cos^2\gamma = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \cos^2\gamma = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \cos\gamma = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \gamma = \frac{\pi}{2}.$$

Así, concluimos que la proposción es **FALSA**. ★

Ejemplo 84 *: Halle el vector* $\boldsymbol{v}$ *de longitud* 4 *cuyos cosenos directores son* $\dfrac{6}{11}$*,* $\dfrac{7}{11}$ *y* $-\dfrac{6}{11}$.

Solución : Es conocido que, si α, β y γ son los ángulos directores de un vector $\boldsymbol{v_1} = (a_1, b_1, c_1)$, con respecto a los vectores canónicos $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{k}$ respectivamente, entonces

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}, \qquad \cos\beta = \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} \qquad \text{y} \qquad \cos\gamma = \frac{c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}.$$

Por lo tanto, el vector $\boldsymbol{w} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ es un vector unitario, ya que

$$\boldsymbol{w} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}, \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}, \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}\right) = \frac{\boldsymbol{v_1}}{|\boldsymbol{v_1}|}.$$

Sea $\boldsymbol{v} = (a, b, c)$ el vector buscado de norma 4, es decir,

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 4,$$

entonces, el vector buscado es

$$\boldsymbol{v} = 4\,(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = 4\left(\frac{6}{11}, \frac{7}{11}, -\frac{6}{11}\right),$$

es decir,

$$\boldsymbol{v} = \left(\frac{24}{11}, \frac{28}{11}, -\frac{24}{11}\right).$$

★

Ejemplo 85 *: Suponga que los vectores* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ *forman entre sí un ángulo de* $\dfrac{\pi}{6}$*. Si* $|\boldsymbol{u}| = 6$*,* $|\boldsymbol{v}| = 5$*, calcular* $|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|$.

Solución : Es conocido que

$$|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{u}|\,|\boldsymbol{v}| \operatorname{sen}\theta,$$

donde, θ es el ángulo que forman los vectores $|\boldsymbol{u}|$ y $|\boldsymbol{v}|$, así,

$$|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| = (6)\,(5) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = (30)\left(\frac{1}{2}\right) = 15 \qquad \Longrightarrow \qquad |\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| = 15.$$

★

Ejemplo 86 *: Sean $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ dos vectores en $\mathbb{R}^n$ y c un número real. Demuestre que*

$$\text{proy}_{\boldsymbol{u}} c\boldsymbol{v} = c \ \text{proy}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{v}.$$

Demostración : Tenemos que

$$\text{proy}_{\boldsymbol{u}} c\boldsymbol{v} = \frac{c\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|^2}\boldsymbol{u} = c \ \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|^2}\boldsymbol{u} = c \ \text{proy}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{v}.$$

★

Ejemplo 87 *: Sean $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ dos vectores ortogonales con normas 4 y 2 respectivamente. Calcule*

$$|(\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v}) \times (3\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})|.$$

Solución : Por propiedades del producto vectorial, se tiene

$$(\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v}) \times (3\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} \times (3\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} + (2\boldsymbol{v}) \times (3\boldsymbol{u}) - (2\boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{v},$$

observemos que

- los vectores $\boldsymbol{u}$ y $2\boldsymbol{u}$, son paralelos, por lo tanto $\boldsymbol{u} \times (2\boldsymbol{u}) = 0$,
- los vectores $\boldsymbol{v}$ y $2\boldsymbol{v}$, son paralelos, por lo tanto $(2\boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{v} = 0$,
- el producto $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}$,

luego,

$$(\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v}) \times (3\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) = -(-\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}) + 6 \ \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u} = 7 \ \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u},$$

por lo que,

$$|(\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v}) \times (3\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})| = |7 \ \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}| = 7 \, |\boldsymbol{v}| \, |\boldsymbol{u}| \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 7\,(4)\,(2)\,(1) = 56,$$

es decir,

$$|(\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v}) \times (3\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})| = 56.$$

★

Ejercicios

1. Sea $\mathbb{R}^n = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \ / \ x_i \in \mathbb{R}, \ \text{para todo} \ i = 1, 2, \ldots, n\}$, definimos sobre $\mathbb{R}^n$ las operaciones

   - **Suma de vectores** : Sean $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ y $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n)$ vectores de $\mathbb{R}^n$, entonces la **suma de los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$** se define por

   $$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \ldots, a_n + b_n)$$

   - **Multiplicación de un vector por un escalar** : Sean $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ un vector de $\mathbb{R}^n$ y k un escalar cualquiera, definimos la **multiplicación de un vector por un escalar** como

   $$k\boldsymbol{a} = k\,(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) = (ka_1, ka_2, ka_3, \ldots, ka_n)$$

   Sean $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ vectores de $\mathbb{R}^n$, y sean α y β escalares cualesquiera, demostrar que

   (a) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$. Ley conmutativa para la suma de vectores.

   (b) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$. Ley asociativa para la suma de vectores.

   (c) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{a}$, donde, $\boldsymbol{0} = (0, 0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Elemento neutro para la suma.

   (d) $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$. Elemento opuesto para la suma

(e) $\alpha(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}$. Primera ley distributiva para la multiplicación por un escalar.

(f) $(\alpha+\beta)\,\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{a}$. Segunda ley distributiva para la multiplicación por un escalar.

(g) $\alpha(\beta\boldsymbol{a}) = (\alpha\beta)\,\boldsymbol{a}$. Ley asociativa para la multiplicación por un escalar.

(h) $1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$. Elemento identidad para la multiplicación por un escalar.

2. Sea $\mathbb{C}^n = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \;/\; x_i = a_i + ib_i \in \mathbb{C},\ \text{para todo}\ i = 1, 2, \ldots, n\}$, definimos sobre $\mathbb{C}^n$ las operaciones

   - **Suma de vectores** : Sean

     $$\boldsymbol{x} = (a_1+ib_1, a_2+ib_2, a_3+ib_3, \ldots, a_n+ib_n) \quad \text{y} \quad \boldsymbol{y} = (c_1+id_1, c_2+id_2, c_3+id_3, \ldots, c_n+id_n)$$

     vectores de $\mathbb{C}^n$, entonces la **suma de los vectores** $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ se define por

     $$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = (a_1+c_1+i(b_1+d_1), a_2+c_2+i(b_2+d_2), a_3+c_3+i(b_3+d_3), \ldots, a_n+c_n+i(b_n+d_n))$$

   - **Multiplicación de un vector por un escalar** : Sean $\boldsymbol{x} = (a_1+ib_1, a_2+ib_2, a_3+ib_3, \ldots, a_n+ib_n)$ un vector de $\mathbb{C}^n$ y k un escalar cualquiera, definimos la **multiplicación de un vector por un escalar** como

     $$k\boldsymbol{x} = (ka_1+ikb_1, ka_2+ikb_2, ka_3+ib_3, \ldots, ka_n+ikb_n)$$

   Sean $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ vectores de $\mathbb{C}^n$, y sean α y β escalares cualesquiera, demostrar los mismos item del ejercicio 1

3. Sean $\boldsymbol{u} = (\alpha^3, \alpha+\beta, 1)$ y $\boldsymbol{v} = (8, -2+\sqrt{3}i, \beta^2)$. Hallar los valores de α y β, si existen, para que $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$.

4. Sean $\boldsymbol{a} = (1, 3\beta+1, \alpha, 3)$ y $\boldsymbol{b} = (\alpha^2+2, \beta^2-1, \alpha^4+\alpha-1, \beta)$. Hallar los valores de α y β, si existen, para que $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$.

5. Calcular la longitud de los vectores $\boldsymbol{u} = (-\sqrt{3}, 3\sqrt{2})$ y $\boldsymbol{v} = (2, \sqrt{5}, -\sqrt{2})$.

6. Dados los vectores $\boldsymbol{u} = (-1, 3)$, $\boldsymbol{v} = (-2, -1)$, $\boldsymbol{w} = (1, 2)$, $\boldsymbol{p} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$, en $\mathbb{R}^2$, hallar cada uno de los siguientes vectores

   1. $\boldsymbol{u}+3\boldsymbol{v}-4\boldsymbol{w}$ 2. $2\boldsymbol{p}-4\boldsymbol{w}+6\boldsymbol{u}$ 3. $\boldsymbol{p}-\frac{1}{4}\boldsymbol{u}-\frac{3}{2}\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}$ 4. $|\boldsymbol{u}|\,\boldsymbol{u}-4\boldsymbol{p}-|\boldsymbol{v}|\,\boldsymbol{w}$

7. Hallar cada uno de los siguientes vectores

   1. $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{v}+4\boldsymbol{u}$ 2. $|\boldsymbol{w}|\,\boldsymbol{a}-|2\boldsymbol{u}|\,\boldsymbol{b}+6\boldsymbol{u}$ 3. $(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u})\,\boldsymbol{u}+\dfrac{\boldsymbol{a}}{2}-\dfrac{\boldsymbol{w}}{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}}$ 4. $|\boldsymbol{u}|\,\boldsymbol{v}+2\boldsymbol{b}-|\boldsymbol{v}|\,\boldsymbol{w}$

   para los siguientes vectores

   (a) $\boldsymbol{a} = (1, 10)$, $\boldsymbol{b} = (4, -5)$, $\boldsymbol{u} = (1, 2)$, $\boldsymbol{v} = (-1, -3)$, $\boldsymbol{w} = (-3, 2)$.

   (b) $\boldsymbol{a} = (2, -1, 4)$, $\boldsymbol{b} = (4, -2, 7)$, $\boldsymbol{u} = (-3, 4, 2)$, $\boldsymbol{v} = (7, -1, 3)$, $\boldsymbol{w} = (1, 2, 8)$.

   (c) $\boldsymbol{a} = (1, 1, 2, 4)$, $\boldsymbol{b} = (3, 0, 2, -2)$, $\boldsymbol{u} = (2, -1, -5, 2)$, $\boldsymbol{v} = (1, -1, -4, 0)$, $\boldsymbol{w} = (2, 1, 1, 6)$.

8. Dados los vectores $\boldsymbol{a} = (1, 1, 4)$, $\boldsymbol{b} = (5, -3, -1)$ y $\boldsymbol{c} = (5, -7, 2)$, calcule

   1. $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|$ 2. $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}-3\boldsymbol{b}|$ 3. $|4\boldsymbol{a}|$ 4. $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$ 5. $|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|$

   6. $|-2\,|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}||$ 7. $||\boldsymbol{a}|\,\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{c}|$ 8. $|(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}-|\boldsymbol{c}|\,\boldsymbol{b}|$ 9. $||\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}|\,\boldsymbol{c}-|\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}|\,\boldsymbol{a}|$

9. Demostrar que si $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ es un vector arbitrario en $\mathbb{R}^2$, entonces

   $$\boldsymbol{a} = a_1\,\boldsymbol{i}+a_2\,\boldsymbol{j},$$

   donde, $\boldsymbol{i} = (1, 0)$ y $\boldsymbol{j} = (0, 1)$ son los vectores canónicos de $\mathbb{R}^2$.

10. Demostrar que si $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ es un vector arbitrario en $\mathbb{R}^3$, entonces

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k},$$

donde, $\boldsymbol{i} = (1,0,0)$, $\boldsymbol{j} = (0,1,0)$ y $\boldsymbol{k} = (0,0,1)$ son los vectores canónicos de $\mathbb{R}^3$.

11. Demostrar que si $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es un vector arbitrario en $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i\ \boldsymbol{e_i},$$

donde, $\boldsymbol{e_i}$, con $i = 1, 2, \ldots, n$ son los vectores canónicos de $\mathbb{R}^n$.

12. Demuestre que si $\boldsymbol{v} = (a, b)$, un vector de $\mathbb{R}^2$ diferente de cero, entonces

$$\boldsymbol{u} = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

es un vector que tiene norma 1, el vector $\boldsymbol{u}$ se denomina **vector unitario**.

13. Demuestre que si $\boldsymbol{v} = (a, b, c)$, un vector de $\mathbb{R}^3$ diferente de cero, entonces

$$\boldsymbol{u} = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \right)$$

es un vector unitario.

14. Según lo demostrado en los ejercicios 12 y 13. ¿Podría dar un resultado general para un vector $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$? ¿Cuál sería ese resultado?

15. Sea $\boldsymbol{v} = (2, -1)$. Hallar un vector unitario asociado a $\boldsymbol{v}$.

16. Sea $\boldsymbol{v} = (3, -1, -2)$. Hallar un vector unitario asociado a $\boldsymbol{v}$.

17. Sea $\boldsymbol{v} = \left(\sqrt{2}, \sqrt{3}, 1, 0, -1\right)$. Hallar un vector unitario asociado a $\boldsymbol{v}$.

18. Dados los vectores

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} i-1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hallar

1. Los productos escalares que sean posibles.
2. $(-3\boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a}$
3. $\boldsymbol{d} \cdot (\boldsymbol{d} + \boldsymbol{e})$
4. $(\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{e})\, \boldsymbol{c}$

19. Sean $\boldsymbol{\alpha} = (1, 2)$, $\boldsymbol{\beta} = (-1, 1)$. Si $\boldsymbol{\gamma}$ es un vector tal que $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\gamma} = -1$ y $\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 3$. Hallar $\boldsymbol{\gamma}$.

20. Encuentre el ángulo comprendido entre los vectores $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{b} = -6\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$.

21. Encuentre el ángulo comprendido entre los vectores $\boldsymbol{x} = (1, 0, 1)$ y $\boldsymbol{y} = (1, -2, 2)$.

22. Encuentre el ángulo comprendido entre los vectores $\boldsymbol{a} = (4, -3, -2)$ y $\boldsymbol{b} = (-1, 2, 5)$.

23. Encuentre el ángulo comprendido entre los vectores $\boldsymbol{a} = (0, 3, 9)$ y $\boldsymbol{b} = (1, -3, 4)$.

24. Encuentre el ángulo comprendido entre los vectores $\boldsymbol{a} = (3, 2, 1)$ y $\boldsymbol{b} = (1, -1, 1)$.

25. Encuentre el ángulo comprendido entre los vectores $\boldsymbol{a} = (1, -1, 0)$ y $\boldsymbol{b} = (2, -3, 1)$.

26. Determine si $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ forman un ángulo agudo, un ángulo obtuso o son ortogonales.

    1. $\boldsymbol{u} = (6,1,4)$, $\boldsymbol{v} = (2,0,-3)$
    2. $\boldsymbol{u} = (0,0,-1)$, $\boldsymbol{v} = (1,1,1)$
    3. $\boldsymbol{u} = (-6,0,4)$, $\boldsymbol{v} = (3,1,6)$
    4. $\boldsymbol{u} = (2,4,-8)$, $\boldsymbol{v} = (5,3,7)$.

27. Sean $\boldsymbol{v} = (a,b)$, $\boldsymbol{i} = (1,0)$ y $\boldsymbol{j} = (0,1)$ vectores de $\mathbb{R}^2$. Sean

    - θ el ángulo entre los vectores $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{i}$.
    - ϕ el ángulo entre los vectores $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{j}$.

    (a) Demostrar que
    $$\cos\theta = \frac{a}{|\boldsymbol{v}|} \qquad \text{y} \qquad \cos\phi = \frac{b}{|\boldsymbol{v}|}$$
    Los ángulos θ y ϕ se denominan **ángulos directores**, mientras que sus cosenos se denominan **cosenos directores**.

    (b) Demuestre que $\cos^2\theta + \cos^2\phi = 1$.

28. Sean $\boldsymbol{v} = (a,b,c)$, $\boldsymbol{i} = (1,0,0)$, $\boldsymbol{j} = (0,1,0)$ y $\boldsymbol{k} = (0,0,1)$ vectores de $\mathbb{R}^3$. Sean

    - θ el ángulo entre los vectores $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{i}$.
    - ϕ el ángulo entre los vectores $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{j}$.
    - ψ el ángulo entre los vectores $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{k}$.

    (a) Demostrar que
    $$\cos\theta = \frac{a}{|\boldsymbol{v}|}, \qquad \cos\phi = \frac{b}{|\boldsymbol{v}|} \qquad \text{y} \qquad \cos\psi = \frac{c}{|\boldsymbol{v}|}$$
    Los ángulos θ, ϕ y ψ se denominan **ángulos directores**, mientras que sus cosenos se denominan **cosenos directores**.

    (b) Demuestre que $\cos^2\theta + \cos^2\phi + \cos^2\psi = 1$.

29. Según lo demostrado en los ejercicios 27 y 28. ¿Podría dar un resultado general para un vector $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$? ¿Cuál sería ese resultado?

30. Encuentre todos los vectores perpendiculares tanto a $(1,-3,-2)$ como a $(-3,6,5)$.

31. Demuestre que para cualesquiera números reales α y β, los vectores $\boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{i} + \beta\boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{v} = \beta\boldsymbol{i} - \alpha\boldsymbol{j}$ son ortogonales.

32. Encuentre todos los vectores perpendiculares tanto a $-2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$ como a $3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$.

33. Calcule la componente z del vector $\boldsymbol{b} = (2,4,z)$, si se sabe que forma un ángulo de $60°$ con el vector $\boldsymbol{a} = (1,2,0)$.

34. ¿Cuál de las siguientes expresiones no tiene sentido?

    (a) $\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w})$ (b) $(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}) + \boldsymbol{w}$ (c) $|\boldsymbol{u}|\,(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w})$

    (d) $(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{w}$ (e) $(|\boldsymbol{u}|\,\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}$ (f) $|\boldsymbol{u}|\cdot\boldsymbol{v}$

35. Describa los vectores $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ que son ortogonales al vector $(3,-1)$. Verifique que éstos son los puntos de una recta que pasa por el origen.

36. Demuestre que para cualesquiera números reales α y β, los vectores $\boldsymbol{u} = (\alpha,\beta)$ y $\boldsymbol{v} = (\beta,-\alpha)$ son ortogonales.

37. Determine el valor de α para que los siguientes conjuntos de vectores sean ortogonales

    1. $\{(0,1)\,,\ (1,\alpha)\}$ 2. $\{(1,2)\,,\ (\alpha,5)\}$ 3. $\{(2,3,0)\,,\ (0,0,\alpha)\}$ 4. $\{(1,2,-1)\,,\ (3,1,\alpha)\}$

38. (a) Defina ángulos directores y cosenos directores.
    (b) Demuestre que los vectores canónicos de $\mathbb{R}^2$ son ortogonales.
    (c) Halle los cosenos directores del vector $\boldsymbol{v}=(a,b)$, diferente de cero, de $\mathbb{R}^2$.
    (d) Sean θ el ángulo director de $\boldsymbol{v}$ respecto al primer vector canónico $\boldsymbol{i}$ y ϕ el ángulo director de $\boldsymbol{v}$ respecto al segundo vector canónico $\boldsymbol{j}$. Demuestre que

$$\cos\phi = \operatorname{sen}\theta,$$

es decir, si $\boldsymbol{v}=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}$, entonces

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

donde θ es la dirección de $\boldsymbol{v}$, es decir, θ es el ángulo director asociado al vector canónico $\boldsymbol{i}$.

39. Demuestre que si $\boldsymbol{v}=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}\neq 0$, entonces

$$\boldsymbol{u} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\boldsymbol{i} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\boldsymbol{j}$$

es un vector unitario que tiene la misma dirección que $\boldsymbol{v}$.

40. Dados los vectores $\boldsymbol{a}=\left(\frac{1}{2},-1\right)$ y $\boldsymbol{b}=(3,-2,5)$

    (a) Halle la dirección de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.
    (b) Calcule los cosenos directores de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

41. Si $\boldsymbol{v}=3\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{j}$. Encuentre $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$, donde θ es el ángulo director asociado a $\boldsymbol{i}=(1,0)$.

42. Si $\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}$. Encuentre $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$, donde θ es el ángulo director asociado a $\boldsymbol{i}=(1,0)$.

43. Encuentre un vector unitario que tenga la misma dirección que $(3,1,-7)$. Encuentre también un vector de longitud 5 orientado en la dirección opuesta.

44. Encuentre un vector de longitud 10 con dirección opuesta a $-2\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$.

45. Halle el vector $\boldsymbol{v}$ de longitud 4 cuyos cosenos directores son $\frac{6}{11}$, $\frac{7}{11}$ y $-\frac{6}{11}$.

46. Sea $\boldsymbol{u}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$ un vector que parte del origen y apunta hacia el primer octante. Si $|\boldsymbol{u}|=5$, encuentre c.

47. Dados los puntos $A\,(2,-1,5)$, $B\,(5,5,8)$ y $C\,(7,9,10)$, hallar el coseno del ángulo entre los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

48. Encuentre el ángulo $\sphericalangle P_1P_2P_3$ si $P_1\,(2,-3,4)$, $P_2\,(-2,6,1)$ y $P_3\,(2,0,2)$.

49. Encuentre en cada caso la proyección ortogonal del vector $\boldsymbol{b}$ sobre el vector $\boldsymbol{a}$.

    1. $\boldsymbol{a}=(2,0,-3)$ y $\boldsymbol{b}=(4,3,-1)$ 2. $\boldsymbol{a}=(-5,-3,4)$ y $\boldsymbol{b}=(2,7,-5)$
    3. $\boldsymbol{a}=(-6,1)$ y $\boldsymbol{b}=(-2,3)$ 4. $\boldsymbol{a}=(2,5)$ y $\boldsymbol{b}=(-1,-1)$

50. Sean $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ dos vectores en $\mathbb{R}^n$ y c un número real. Demuestre que

$$\operatorname{proy}_{\boldsymbol{u}} c\boldsymbol{v} = c\ \operatorname{proy}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v}.$$

51. Hallar la proyección del vector $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i} - \frac{5}{3}\boldsymbol{j} + \frac{1}{6}\boldsymbol{k}$ sobre la dirección del vector $\boldsymbol{w} = (2, 1, -2)$.

52. Hallar la proyección del vector $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ sobre la dirección del vector $\boldsymbol{w} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$.

53. En cada uno de los incisos siguientes, encuentre el vector $\boldsymbol{u} = \text{proy}_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{y}$, proyección del vector $\boldsymbol{y}$ sobre el vector $\boldsymbol{x}$. Verifique en cada caso que el vector obtenido es ortogonal a $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{u}$

    a. $\boldsymbol{x} = (2, 5)\,, \;\; \boldsymbol{y} = (3, 4)$ *b.* $\boldsymbol{x} = (4, 2)\,, \;\; \boldsymbol{y} = (2, 1)$ *c.* $\boldsymbol{x} = (1, 0)\,, \;\; \boldsymbol{y} = (4, 5)$

    d. $\boldsymbol{x} = (2, 1, 0)\,, \;\; \boldsymbol{y} = (1, 0, 1)$ *e.* $\boldsymbol{x} = (1, 1, 1)\,, \;\; \boldsymbol{y} = (0, 2, 0)$ *f.* $\boldsymbol{x} = (1, 1, 1, 2)\,, \;\; \boldsymbol{y} = (0, 2, 0, 3)$

54. Use el concepto de proyección de un vector sobre otro para calcular el área del triángulo cuyos vértices son $A(-2, -3)$, $B(3, 2)$, $C(-1, 5)$.

55. Sean los vectores $\boldsymbol{u} = (\alpha, \beta)$ y $\boldsymbol{v} = (4, 0)$. Si el ángulo que ellos forman es $\frac{\pi}{4}$, hallar α y β, tales que $\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u} = (3, 0)$.

56. Sea $\boldsymbol{v}$ el vector en $\mathbb{R}^3$ cuyo punto inicial está en $(1, 3, 7)$ y cuyo punto final está en $(4, 5, 7)$. Hallar la proyección del vector $(1, 2, 1)$ sobre $\boldsymbol{v}$.

57. Use el concepto de proyección de un vector sobre otro para calcular el área del triángulo cuyos vértices son

    1. $A(0, 0)\,, \;\; B(5, 3)\,, \;\; C(7, 8)$ 2. $A(0, 0)\,, \;\; B(9, 1)\,, \;\; C(5, 4)$

    3. $A(1, 3, 2)\,, \;\; B(2, 5, 3)\,, \;\; C(-2, 0, 0)\,.$

58. Dados los vectores $\boldsymbol{a} = (3, 4, 2)$, $\boldsymbol{b} = (-2, 0, 4)$, $\boldsymbol{c} = (4, -2, 5)$ y $\boldsymbol{d} = (3, 3, 7)$, calcule cada una de las siguientes expresiones

    1. $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 2. $\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}$ 3. $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{d})$ 4. $\boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{d})$

    5. $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} - 2(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{d})$ 6. $|(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}|$ 7. $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ 8. $\boldsymbol{d} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$

59. Sean $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ dos vectores cuyas normas son 3 y 7 respectivamente. Si $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 5$, calcule $|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|$.

60. Considere los vectores $\boldsymbol{u} = (3, 1, 2)$, $\boldsymbol{v} = (2, -4, 3)$, $\boldsymbol{w} = (1, 1, 7)$, compruebe que

$$(\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} + 2\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}.$$

61. Demuestre que si los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ no son paralelos y $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, entonces $\alpha = \beta = 0$.

62. Sean $\boldsymbol{u} = (2, -3, -3)$, $\boldsymbol{v} = (3, 1, 1)$. Calcule

    a. $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ *b.* $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{v}$ *c.* $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \times (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})$ *d.* $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \times (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})$

    e. $(2\boldsymbol{u} + 3\boldsymbol{v}) \times (\boldsymbol{u} - 4\boldsymbol{v})$

63. Suponga que los vectores $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ forman entre sí un ángulo de $\frac{\pi}{4}$. Demuestre que $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|$.

64. Calcular el área del paralelogramo generado por los vectores $\boldsymbol{u} = (3, 2, 5)$ y $\boldsymbol{v} = (1, 2, 7)$.

65. Calcular el volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen de coordenadas y los puntos $A(2, 1, 1)$, $B(-3, 7, 9)$, $C(-1, -5, 0)$.

66. Encuentre dos vectores de longitud 10, cada uno de los cuales sea perpendicular tanto a $4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$ como a $-2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$.

67. Si $\boldsymbol{a} = (4, -2, 1)$, $\boldsymbol{b} = (-2, 3, -2)$ y $\boldsymbol{c} = (-1, 4, 3)$. Encuentre lo siguiente

    (*a*) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ (*b*) $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$ (*c*) $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ (*d*) $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$

68. Sean $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$ tres vectores tales que $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=\mathbf{0}$. Demuestre que
$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}=\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}=\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u}.$$

69. Suponga que los vectores $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ son vectores unitarios que forman entre sí un ángulo de $\dfrac{\pi}{6}$. Calcular $|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|$.

70. Suponga que los vectores $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ forman entre sí un ángulo de $\dfrac{\pi}{6}$. Si $|\boldsymbol{u}|=6$, $|\boldsymbol{v}|=5$, calcular $|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|$.

71. Sean $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ dos vectores cuyas normas son 3 y 7 respectivamente. Si $|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|=5$, calcule $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$.

72. Sean $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ dos vectores ortogonales con normas 4 y 2 respectivamente. Calcule $|(\boldsymbol{u}+2\boldsymbol{v}) \times (3\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})|$.

73. Calcular el área del paralelogramo cuyos vértices son $A(1,1,1)$, $B(2,3,4)$, $C(-2,1,5)$, $D(-1,3,8)$.

74. Calcular el área del triángulo cuyos vértices son $A(3,2,3)$, $B(-1,2,5)$, $C(0,2,7)$.

75. Calcular el volumen del paralelepípedo generado por los vectores
$$\boldsymbol{u}=(2,1,4), \qquad \boldsymbol{v}=(-1,0,9), \qquad \boldsymbol{w}=(3,2,2).$$

76. Calcular el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos $A(2,1,2)$, $B(5,3,7)$, $C(-3,4,9)$, $D(10,9,11)$.

77. Determine la componente z del vector $\boldsymbol{v}=(2,4,z)$, si se sabe que forma un ángulo de magnitud 60° con el vector $\boldsymbol{w}=(1,2,0)$.

78. Encuentre la medida de los ángulos internos del triángulo cuyos vértices son los puntos $A(4,1,0)$, $B(2,-1,3)$ y $C(1,-3,2)$.

79. Determinar si las siguientes proposiciones son **VERDADERA** ó **FALSA**.

   (a) Si el ángulo formado por $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ es $\dfrac{\pi}{2}$, entonces $|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}|^2=|\boldsymbol{u}|^2+|\boldsymbol{v}|^2$.

   (b) Si $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ son $n-$vectores, tales que $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}=\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$, entonces $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

   (c) Si $\boldsymbol{u}$ es un vector de $\mathbb{R}^3$ múltiplo escalar positivo de $\boldsymbol{v}$, entonces se tiene que
   $$|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}|=|\boldsymbol{u}|+|\boldsymbol{v}|.$$

   (d) No existe α, tal que $\boldsymbol{u}=(-2,5)$ y $\boldsymbol{v}=(\alpha,-2)$ sean ortogonales.

   (e) Si $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ son vectores no nulos de $\mathbb{R}^2$, entonces se cumple que
   $$\operatorname{proy}_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\operatorname{proy}_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{u}+\operatorname{proy}_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}.$$

   (f) Sean $\boldsymbol{u}=(a,b)$ y $\boldsymbol{v}=(c,d)$ no nulos. Entonces, si $ac+bd<0$, los vectores $\boldsymbol{v}$ y $\operatorname{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ tiene la misma dirección.

   (g) Dos de los ángulos directores de cierto vector de $\mathbb{R}^3$ son iguales a $\dfrac{\pi}{4}$, entonces, el tercer ángulo también es $\dfrac{\pi}{4}$.

   (h) Si $\boldsymbol{u}$ es un vector de $\mathbb{R}^2$ múltiplo escalar de $\boldsymbol{v}$, entonces se tiene que $|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}|=|\boldsymbol{u}|+|\boldsymbol{v}|$.

   (i) Sean $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{v}=-x\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{w}=A\boldsymbol{v}$. Entonces, el ángulo formado por $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ es independiente de x.

   (j) Si $\boldsymbol{u}$ es un vector de $\mathbb{R}^3$ múltiplo escalar de $\boldsymbol{v}$, entonces se tiene que $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}=\mathbf{0}$.

80. Seleccionar la letra correspondiente a la única alternativa correcta. Justificar todas sus respuestas.

1 Sean $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ de $\mathbb{R}^2$ y ϕ el ángulo formado por ellos. Entonces

a Si $\phi = \frac{\pi}{2}$, entonces $\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$.

b $\boldsymbol{v}$ y $\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ tienen la misma dirección si $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$.

c Si $\phi = \pi$, entonces $\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}$.

d $\boldsymbol{v}$ y $\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ tienen direcciones opuestas si $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0$.

2 Se dan las siguientes proposiciones:

i. Los cosenos directores de un vector de $\mathbb{R}^3$ pueden ser $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

ii. Para todo escalar α y para todo $\boldsymbol{v}$ del plano $\mathbb{R}^2$ se cumple que $|\alpha \boldsymbol{v}| = \alpha\, |\boldsymbol{v}|$.

iii. $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ del espacio $\mathbb{R}^3$ son paralelos si y solo si $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$.

Entonces, son ciertas

a) Sólo iii *b*) i y iii *c*) Sólo ii *d*) i y ii

3 El ángulo entre $\boldsymbol{u} = (1, 1)$ y $\boldsymbol{v} = \left(1, \sqrt{3}\right)$ es

a. 105° *b.* 15° *c.* 45° *d.* 60°

4 Sean $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ vectores del plano xy y ϕ el ángulo entre ellos. Entonces

a. $\boldsymbol{v}$ y $\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ son perpendiculares y $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} > 0$ si $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$.

b. $\boldsymbol{v}$ y $\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ son paralelos y $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} > 0$ si $\frac{\pi}{2} < \phi < \pi$.

c. $\boldsymbol{v}$ y $\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ son perpendiculares y $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} < 0$ si $\frac{\pi}{2} < \phi < \pi$.

d. $\boldsymbol{v}$ y $\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ son paralelos y $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} > 0$ si $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$.

5 Sean $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ vectores del plano xy. Entonces

a. $\boldsymbol{v}$ y $\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ tienen la misma dirección si $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} < 0$.

b. $\boldsymbol{v}$ y $\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ tienen direcciones opuestas si $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} > 0$.

c. $\boldsymbol{v}$ y $\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ tienen la misma dirección si $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} > 0$.

d. $\boldsymbol{v}$ y $\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ tienen direcciones opuestas si $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0$.

6 Sean $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ vectores del plano xy y ϕ el ángulo entre ellos. Entonces

a. Si $\phi = 135°$, entonces $\boldsymbol{v}$ y $\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ tienen la misma dirección.

b. Si $\phi = 45°$, entonces $\text{comp}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u} < 0$.

c. Si $\phi = 60°$, entonces $|\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}| = -\text{comp}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$

d. Si $\phi = 150°$, entonces $\boldsymbol{v}$ y $\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ tienen direcciones opuestas.

7 Sean $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ vectores y ϕ es el ángulo que ellos forman. Entonces

a. $\boldsymbol{u} - \text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ es perpendicular a $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} > 0$, si $\phi = \frac{2\pi}{3}$.

b. $\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ es paralela a $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{u} - \text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ es paralelo a $\boldsymbol{u}$.

c. $\boldsymbol{u} - \text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ es perpendicular a $\boldsymbol{v}$ y $\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ es perpendicular a $\boldsymbol{u}$.

d. $\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ es paralelo a $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} < 0$ si $\phi = 150°$.

8 Se dan los puntos P y Q y el vector PQ. La alternativa correcta es:

$a.$ $P(1,1,-1)$, $Q(0,2,3)$ y $PQ=(1,1,4)$ $\quad$ $b.$ $P(1,1,-1)$, $Q(0,2,3)$ y $PQ=(-1,1,4)$

$c.$ $P(1,-1,1)$, $Q(0,2,3)$ y $PQ=(-1,1,2)$ $\quad$ $d.$ $P(1,-1,1)$, $Q(1,2,3)$ y $PQ=(0,3,4)$

Respuestas: Ejercicios

3. $\alpha = i\sqrt{3}-1$ y $\beta=-1$; 4. No existen valores; 5. $|\boldsymbol{u}|=\sqrt{21}$, $|\boldsymbol{v}|=\sqrt{11}$; 6.1. $(-11,-8)$; 6.2. $\left(-9,\frac{32}{3}\right)$; 6.3. $\left(\frac{11}{4},-\frac{11}{12}\right)$; 6.4. $\left(-\sqrt{5}-\sqrt{10}-2,-2\sqrt{5}-\frac{4}{3}+3\sqrt{10}\right)$; 7.$a$.1 $\begin{pmatrix} 7 \\ 24 \end{pmatrix}$;

7.a.2 $\begin{pmatrix} -8\sqrt{5}+\sqrt{13}+6 \\ 10\sqrt{5}+10\sqrt{13}+12 \end{pmatrix}$; 7.$a$.3 $\begin{pmatrix} -\frac{13}{2} \\ -\frac{19}{3} \end{pmatrix}$; 7.$a$.4 $\begin{pmatrix} -\sqrt{5}+3\sqrt{10}+8 \\ -3\sqrt{5}-2\sqrt{10}-10 \end{pmatrix}$; 7.$b$.1 $\begin{pmatrix} -24 \\ 17 \\ 6 \end{pmatrix}$;

7.b.2 $\begin{pmatrix} 2\sqrt{69}-8\sqrt{29}-18 \\ 4\sqrt{29}-\sqrt{69}+24 \\ 4\sqrt{69}-14\sqrt{29}+12 \end{pmatrix}$; 7.$b$.3 $\begin{pmatrix} \frac{8032}{29} \\ -\frac{8037}{58} \\ \frac{14\,057}{29} \end{pmatrix}$; 7.$b$.4 $\begin{pmatrix} 7\sqrt{29}-\sqrt{59}+8 \\ -\sqrt{29}-2\sqrt{59}-4 \\ 3\sqrt{29}-8\sqrt{59}+14 \end{pmatrix}$; 7.$c$.1 $\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -10 \\ 12 \end{pmatrix}$;

7.c.2 $\begin{pmatrix} \sqrt{42}-6\sqrt{34}+12 \\ \sqrt{42}-6 \\ 2\sqrt{42}-4\sqrt{34}-30 \\ 4\sqrt{34}+4\sqrt{42}+12 \end{pmatrix}$; 7.$c$.3 $\begin{pmatrix} -\frac{89}{6} \\ \frac{53}{6} \\ \frac{124}{3} \\ -12 \end{pmatrix}$; 7.$c$.4 $\begin{pmatrix} \sqrt{34}-6\sqrt{2}+6 \\ -3\sqrt{2}-\sqrt{34} \\ 4-3\sqrt{2}-4\sqrt{34} \\ -18\sqrt{2}-4 \end{pmatrix}$; 8.1. $\sqrt{57}+\sqrt{78}$;

8.2. $3\sqrt{19}$; 8.3. $12\sqrt{2}$; 8.4. $\sqrt{227}$; 8.5. $3\sqrt{2}+\sqrt{35}+\sqrt{78}$; 8.6. 10; 8.7. $18\sqrt{17}$;

8.8. $\sqrt{176\sqrt{78}+3042}$; 8.9. $12\sqrt{19}$; 15. $\boldsymbol{u}=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$; 16. $\boldsymbol{u}=\left(\frac{3}{\sqrt{14}},-\frac{1}{\sqrt{14}},-\frac{2}{\sqrt{14}}\right)$;

17. $\boldsymbol{u}=\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}},\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}},\frac{1}{\sqrt{7}},0,-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)$; 18.1. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1-2i$, $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=-1+2i$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=2+5i$, $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=2-5i$,
$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=-4-i$, $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}=-4+i$, $\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{e}=-32$; 18.2. $12+3i$; 18.3. 1; 18.4. $(-64,-32,-32i,-64)$;

19. $\boldsymbol{\gamma}=\left(-\frac{7}{3},\frac{2}{3}\right)$; 20. $\theta=\pi$; 21. $\theta=\frac{1}{4}\pi$; 22. $\theta=\arccos\left(\frac{-20}{\sqrt{870}}\right)$; 23. $\theta=\arccos\left(\frac{9}{2\sqrt{65}}\right)$;

24. $\theta=\arccos\left(\frac{2}{\sqrt{42}}\right)$; 25. $\theta=\arccos\left(\frac{5}{2\sqrt{7}}\right)$; 26.1. Ortogonal; 26.2. Obtuso; 26.3. Agudo;

26.4. Obtuso; 30. $(-3,1,-3)\,t$, con $t\in\mathbb{R}$; 32. $(-11,-2,5)\,t$, con $t\in\mathbb{R}$; 33. $\pm\sqrt{60}$;

34.a. No; 34.b. No; 34.c. Si; 34.d. Si; 34.e. Si; 34.f. No; 35. $y=3x$;

37.1. $\alpha=0$; 37.2. $\alpha=-10$; 37.3. $\alpha\in\mathbb{R}$; 37.4. $\alpha=5$; 40.a. $\boldsymbol{u}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{1}{5}\sqrt{5}\boldsymbol{i}-\frac{2}{5}\sqrt{5}\boldsymbol{j}$
y $\boldsymbol{u}=\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{3}{\sqrt{38}}\boldsymbol{i}-\frac{2}{\sqrt{38}}\boldsymbol{j}+\frac{5}{\sqrt{38}}\boldsymbol{k}$; 40.$b$. $\cos\theta_{\boldsymbol{a}}=\frac{1}{5}\sqrt{5}$, $\cos\phi_{\boldsymbol{a}}=-\frac{2}{5}\sqrt{5}$ y $\cos\theta_{\boldsymbol{b}}=\frac{3}{\sqrt{38}}$, $\cos\phi_{\boldsymbol{b}}=\frac{-2}{\sqrt{38}}$,
$\cos\psi_{\boldsymbol{b}}=\frac{5}{\sqrt{38}}$; 41. $\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{73}}$ y $\operatorname{sen}\theta=\frac{8}{\sqrt{73}}$; 42. $\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{13}}$ y $\operatorname{sen}\theta=-\frac{3}{\sqrt{13}}$;

43. Vector unitario : $\boldsymbol{u}=\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}=\left(\frac{3}{\sqrt{59}},\frac{1}{\sqrt{59}},-\frac{7}{\sqrt{59}}\right)$. Vector longitud 5 : $\left(-\frac{15}{\sqrt{59}},-\frac{5}{\sqrt{59}},\frac{35}{\sqrt{59}}\right)$;

44. $\boldsymbol{v}=\frac{10}{\sqrt{38}}(-2,5,-3)$; 45. $\boldsymbol{v}=\left(\frac{24}{11},\frac{28}{11},-\frac{24}{11}\right)$; 46. $c=\sqrt{12}$; 47. $\cos\theta=1$;

48. $\cos\theta=\frac{33}{\sqrt{1378}}$; 49.1. $\operatorname{proy}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} \frac{22}{13} \\ 0 \\ -\frac{33}{13} \end{pmatrix}$; 49.2. $\operatorname{proy}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} \frac{51}{10} \\ \frac{153}{50} \\ -\frac{102}{25} \end{pmatrix}$; 49.3. $\operatorname{proy}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} -\frac{90}{37} \\ \frac{15}{37} \end{pmatrix}$;

49.4. $\operatorname{proy}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} -\frac{14}{29} \\ -\frac{35}{29} \end{pmatrix}$; 51. $\operatorname{proy}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; 52. $\operatorname{proy}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ -\frac{2}{7} \\ -\frac{6}{7} \end{pmatrix}$; 53.$a$. $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix} \frac{52}{\sqrt{29}} \\ \frac{130}{\sqrt{29}} \end{pmatrix}$;

53.b. $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix} 4\sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} \end{pmatrix}$; 53.$c$. $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$; 53.$d$. $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}$; 53.$e$. $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$; 53.$f$. $\boldsymbol{u}\begin{pmatrix} \frac{8}{\sqrt{7}} \\ \frac{8}{\sqrt{7}} \\ \frac{8}{\sqrt{7}} \\ \frac{16}{\sqrt{7}} \end{pmatrix}$;

54. $A = \frac{35}{2}$; 55. $\boldsymbol{u}_1 = (3, -3)$ y $\boldsymbol{u}_2 = (3, 3)$; 56. $\begin{pmatrix} \frac{21}{13} \\ \frac{14}{13} \\ 0 \end{pmatrix}$; 57.1. $A = \frac{19}{2}$; 57.2. $A = \frac{31}{2}$;

57.3. $A = \frac{1}{2}\sqrt{11}$; 58.1. $16\boldsymbol{i} - 16\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}$; 58.2. $-29\boldsymbol{i} - 13\boldsymbol{j} + 18\boldsymbol{k}$; 58.3. -602; 58.4. 103;

58.5. $\begin{pmatrix} 48 \\ -59 \\ -10 \end{pmatrix}$; 58.6. $16\sqrt{29}$; 58.7. $\begin{pmatrix} 32 \\ -32 \\ 16 \end{pmatrix}$; 58.8. $\begin{pmatrix} 36 \\ -33 \\ -16 \end{pmatrix}$; 59. $4\sqrt{26}$;

62.a. $-11\boldsymbol{j} + 11\boldsymbol{k}$; 62.$b$. $-11\boldsymbol{j} + 11\boldsymbol{k}$; 62.$c$. $\boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; 62.$d$. $22\boldsymbol{j} - 22\boldsymbol{k}$; 62.$e$. $121\boldsymbol{j} - 121\boldsymbol{k}$;

64. $A = 12\sqrt{2}$; 65. $V = \frac{103}{6}$; 66. $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \frac{60}{7} \\ -\frac{20}{7} \\ -\frac{30}{7} \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -\frac{60}{7} \\ \frac{20}{7} \\ \frac{30}{7} \end{pmatrix}$; 67.$a$. $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}$;

67.b. $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = -9\boldsymbol{i} - 7\boldsymbol{j} + 22\boldsymbol{k}$; 67.$c$. $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = 47$; 67.$d$. $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = 2\boldsymbol{i} + 37\boldsymbol{j} + 66\boldsymbol{k}$;

69. $|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| = \frac{1}{2}$; 70. $|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| = 15$; 71. $4\sqrt{26}$; 72. 56; 73. $A = \sqrt{269}$; 74. $A = 5$;

75. $V = 15$; 76. $V = \frac{205}{6}$; 77. $z = \pm 2\sqrt{15}$; 78. $\theta_1 = \arccos\left(\frac{1}{34}\sqrt{102}\right)$, $\theta_2 = \arccos\left(\frac{3}{58}\sqrt{174}\right)$,

$\theta_3 = \arccos\left(\frac{20}{493}\sqrt{493}\right)$; 79.$a$. Verdadero; 79.$b$. Falso; 79.$c$. Verdadero; 79.$d$. Falso;

79.e. Verdadero; 79.f. Falso; 79.g. Falso; 79.h. Verdadero; 79.i. Verdadero; 79.j. Verdadero;

80.1. a.; 80.2. a.; 80.3. b.; 80.4. d.; 80.5. c.; 80.6. d.; 80.7. d.; 80.8. b.;

Bibliografía

1. **Grossman, Staley I.**: "*Álgebra lineal*". Quinta edición. Mc Graw Hill.
2. **Kolman, B. y Hill, D. R.**: "*Álgebra lineal*". Octava edición. PEARSON Prentice Hall.
3. **Rangel, J., y otros**: "*Problemario de álgebra lineal*". Universidad Metropolitana. 1997.
4. **Anton, H. - Rorres, C.**: "*Elementary linear algebra. Applications version*". Six Edition. WILEY.

Este material ha sido revisado recientemente, pero esto no garantiza que esté libre de errores, por esa razón se agradece reportar cualquier error que usted encuentre en este material enviando un mensaje al correo electrónico

farith.math@gmail.com

indicando donde se encuentra(n) dicho(s) error(es). **MUCHAS GRACIAS**.

Rectas y planos en $\mathbb{R}^3$.

Objetivos a cubrir

Código : MAT-3.05

- Rectas en $\mathbb{R}^3$. Ecuaciones de la recta: vectorial, paramétrica y forma simétrica.
- Rectas paralelas. Rectas perpendiculares. Rectas secantes.
- Planos en $\mathbb{R}^3$. Planos paralelos. Planos perpendiculares.

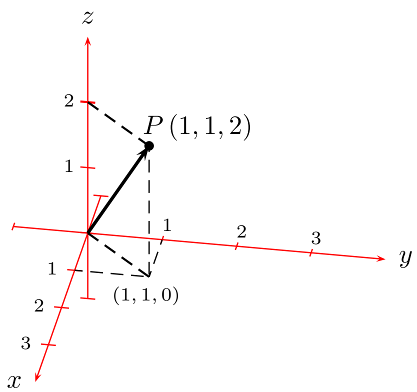
Ejercicios resueltos

Ejemplo 88 *: Representar los siguientes puntos en el sistema coordenado* $\mathbb{R}^3$ *y graficar el vector posición asociado*

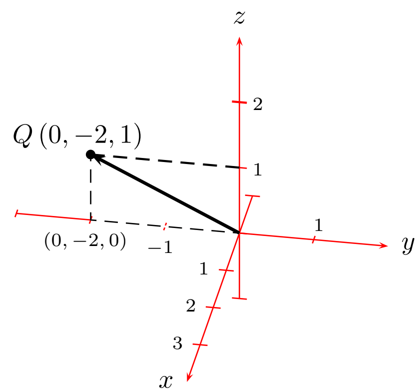
1. $P(1,1,2)$ 2. $Q(0,-2,1)$ 3. $R(3,3,1)$ 4. $A(2,-1,-2)$

Solución :

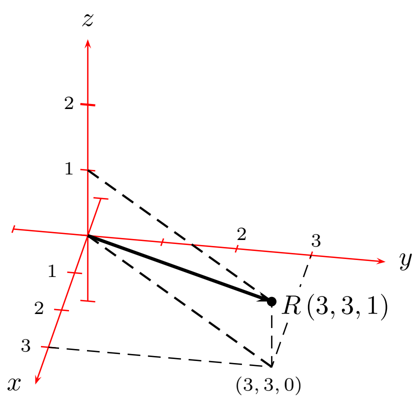
(1)



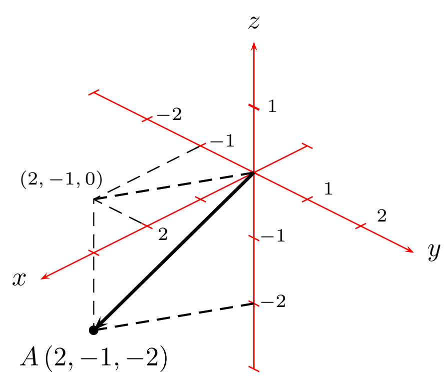
(2)



(3)



(4)



★

Ejemplo 89 *: Determine las ecuaciones paramétricas y forma simétrica de la recta que pasa por el punto* $P(2,1,6)$ *y tiene como vector director* $\boldsymbol{v} = (-2,1,2)$.

Solución : Para escribir las ecuaciones de una recta, en $\mathbb{R}^3$, necesitamos conocer:

- Las coordenadas de un punto por donde pasa la recta. En este ejemplo P.

- El vector director. Este vector tiene que ser paralelo a la recta buscada, en nuestro caso $\boldsymbol{v}$.

Entonces, las ecuaciones paramétricas de la recta buscada son

$$L : \begin{cases} x - 2 = -2t \\ y - 1 = t \\ z - 6 = 2t \end{cases} = \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 1 + t \\ z = 6 + 2t \end{cases}$$

y la ecuación forma simétrica se obtiene despejando el parámetro t de las ecuaciones paramétricas de la recta, así,

$$L : \begin{cases} x - 2 = -2t \\ y - 1 = t \\ z - 6 = 2t \end{cases} = \begin{cases} t = \dfrac{x-2}{-2} \\ t = y - 1 \\ t = \dfrac{z-6}{2} \end{cases}$$

por lo que la ecuación forma simétrica viene dada por

$$\frac{x-2}{-2} = y - 1 = \frac{z-6}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{2-x}{2} = y - 1 = \frac{z-6}{2}.$$

★

Ejemplo 90 *: Determine las ecuaciones paramétricas y forma simétrica de la recta que pasa por los puntos* $P(2,1,6)$ *y* $Q(-2,1,2)$.

Solución : Para escribir las ecuaciones de una recta, en $\mathbb{R}^3$, necesitamos conocer:

- Las coordenadas de un punto por donde pasa la recta. En virtud que la recta buscada debe pasar por los puntos P y Q, podemos elegir cualquiera de estos dos puntos para este item.

- El vector director. Este vector tiene que ser paralelo a la recta buscada, observemos que si consideramos el vector de punto inicial P y punto terminal Q, es decir, el vector de componentes

$$\overline{\boldsymbol{PQ}} = (-2,1,2) - (2,1,6) = (-4,0,-4),$$

  dicho vector está sobre la recta, por lo tanto es paralelo a ella, es más podemos elegir el vector $\boldsymbol{a} = (1,0,1)$, ya que este es paralelo al vector $\overline{\boldsymbol{PQ}}$.

Entonces, las ecuaciones paramétricas de la recta buscada, considerando el punto $Q(-2,1,2)$, son

$$L : \begin{cases} x + 2 = t \\ y - 1 = 0 \\ z - 2 = t \end{cases} = \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 \\ z = 2 + t \end{cases}$$

y la ecuación forma simétrica se obtiene despejando el parámetro t de las ecuaciones paramétricas de la recta, así, la ecuación forma simétrica viene dada por

$$x + 2 = z - 2, \qquad\qquad y = 1.$$

★

Ejemplo 91 *: Determine si el punto* $Q\left(2, \dfrac{9}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ *pertenece a la recta* $L : \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 5 - t \\ z = -1 + 3t \end{cases}.$

Solución : Para determinar si el punto dado pertenece a la recta L, sustituimos dicho punto en la ecuación de la recta para verificar si satisface las igualdades, así,

$$\begin{cases} (2) = 3 - 2t \\ \left(\dfrac{9}{2}\right) = 5 - t \\ \left(\dfrac{9}{2}\right) = -1 + 3t \end{cases} \quad \overset{\text{de la } 1^{\text{ra}} \text{ ecuación}}{\Longrightarrow} \quad 2t = 1 \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{1}{2}.$$

Verifiquemos si las otras dos ecuaciones del sistema se satisfacen con este valor de t.

- Para la 2^{da} ecuación
$$5 - \frac{1}{2} = \frac{10-1}{2} = \frac{9}{2} \quad \checkmark \quad \text{se cumple.}$$

- Para la 3^{ra} ecuación
$$-1 + 3\left(\frac{1}{2}\right) = -1 + \frac{3}{2} = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2} \quad \checkmark \quad \text{se cumple.}$$

El punto $Q\left(2, \dfrac{9}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ satisface las ecuaciones paramétricas de la recta L, por lo tanto concluimos que el punto **si** pertenece a la recta. ★

Ejemplo 92 *: Determine si el punto* $Q(-3,-1,3)$ *pertenece a la recta* $L : \begin{cases} x = t - 2 \\ y = 2 + 3t \\ z = -7 - 4t \end{cases}$.

Solución : Para determinar si el punto dado pertenece a la recta L, sustituimos dicho punto en la ecuación de la recta para verificar si satisface las igualdades, así,

$$\begin{cases} (-3) = t - 2 \\ (-1) = 2 + 3t \\ (3) = -7 - 4t \end{cases} \quad \overset{\text{de la } 1^{\text{ra}} \text{ ecuación}}{\Longrightarrow} \quad t = -3 + 2 \quad \Longrightarrow \quad t = -1.$$

Verifiquemos si las otras dos ecuaciones del sistema se satisfacen con este valor de t.

- Para la 2^{da} ecuación
$$2 + 3(-1) = 2 - 3 = -1 \quad \checkmark \quad \text{se cumple.}$$

- Para la 3^{ra} ecuación
$$-7 - 4(-1) = -7 + 4 = -3 \neq 3 \quad \chi \quad \text{no se cumple.}$$

El punto $Q(-3,-1,3)$ no satisface las ecuaciones paramétricas de la recta L, por lo tanto concluimos que el punto **no** pertenece a la recta. ★

Ejemplo 93 *: Determine el ángulo entre las rectas* $L_1 : \begin{cases} x = 1 + x \\ y = 0 \\ z = -5 + 2z \end{cases}$ *y* $L_2 : \dfrac{x-3}{2} = y - 4 = \dfrac{2-z}{2}$.

Solución : Es conocido que el ángulo entre dos rectas es igual al ángulo entre sus vectores directores, así, tenemos que

- Para la recta $L_1 : \begin{cases} x = 1 + x \\ y = 0 \\ z = -5 + 2z \end{cases}$, el vector director es $\boldsymbol{v_1} = (1,0,2)$.

- Para la recta $L_2 : \dfrac{x-3}{2} = y - 4 = \dfrac{2-z}{2}$, el vector director es $\boldsymbol{v_2} = (2, 1, -2)$.

Entonces, el coseno del ángulo entre los vectores directores de las rectas es

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{v_1} \cdot \boldsymbol{v_2}}{|\boldsymbol{v_1}|\,|\boldsymbol{v_2}|},$$

donde

$$\boldsymbol{v_1} \cdot \boldsymbol{v_2} = (1, 0, 2) \cdot (2, 1, -2) = (1)(2) + (0)(1) + (2)(-2) = 2 - 4 = -2,$$

mientras que

$$|\boldsymbol{v_1}| = \sqrt{(1)^2 + (0)^2 + (2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

y

$$|\boldsymbol{v_2}| = \sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3,$$

por lo tanto,

$$\cos\theta = \frac{-2}{3\sqrt{5}} \qquad \Longrightarrow \qquad \theta = \arccos\left(-\frac{2}{3\sqrt{5}}\right).$$

★

Ejemplo 94 : *Determine el ángulo entre las rectas* $L_1 : 2 - x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{1-z}{3}$ *y* $L_2 : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{1-y}{4} = \dfrac{z+3}{6}$.

Solución : Es conocido que el ángulo entre dos rectas es igual al ángulo entre sus vectores directores, así, tenemos que

- Para la recta $2 - x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{1-z}{3}$, el vector director es $\boldsymbol{v_1} = (-1, 2, -3)$.
- Para la recta $L_2 : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{1-y}{4} = \dfrac{z+3}{6}$, el vector director es $\boldsymbol{v_2} = (2, -4, 6)$.

Entonces, el coseno del ángulo entre los vectores directores de las rectas es

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{v_1} \cdot \boldsymbol{v_2}}{|\boldsymbol{v_1}|\,|\boldsymbol{v_2}|},$$

donde

$$\boldsymbol{v_1} \cdot \boldsymbol{v_2} = (-1, 2, -3) \cdot (2, -4, 6) = (-1)(2) + (2)(-4) + (-3)(6) = -2 - 8 - 18 = -28,$$

mientras que

$$|\boldsymbol{v_1}| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$$

y

$$|\boldsymbol{v_2}| = \sqrt{(2)^2 + (-4)^2 + (6)^2} = \sqrt{4+16+36} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14},$$

por lo tanto,

$$\cos\theta = \frac{-28}{2\sqrt{14}\sqrt{14}} = -\frac{28}{2\left(\sqrt{14}\right)^2} = -1 \qquad \Longrightarrow \qquad \theta = \arccos(-1) = \pi,$$

luego, las rectas son paralelas. ★

Ejemplo 95 : *Hallar, si existe, el punto de intersección entre las rectas*

$$L_1 : x + 3 = \frac{1-y}{2} = -\frac{z}{3} \qquad y \qquad L_2 : \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{4}.$$

Solución : Buscamos el punto R que pertenezca a las rectas L_1 y L_2, para ello escribimos las rectas en sus ecuaciones paramétricas e igualamos las respectivas variables

$$L_1 : \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = -3t \end{cases} \qquad \text{y} \qquad L_2 : \begin{cases} x = 1 + 3s \\ y = 1 + 2s \\ z = 1 + 4s \end{cases},$$

de aquí,

$$\begin{cases} -3 + t = 1 + 3s \\ 1 - 2t = 1 + 2s \\ -3t = 1 + 4s \end{cases} \qquad \overset{\text{de la } 2^{\text{da}} \text{ ecuación}}{\Longrightarrow} \qquad t = -s,$$

sustituimos en la 1^{ra} ecuación

$$-3 + (-s) = 1 + 3s \qquad \Longrightarrow \qquad -4 = 4s \qquad \Longrightarrow \qquad s = -1,$$

por lo que, $t = -(-1) = 1$. Sustituimos el valor de t y de s en la tercera ecuación, $2 + 4s + 3t = 0$ para saber si se satisface

$$1 + 4(-1) + 3(1) = 1 - 4 + 3 = 0 \quad \checkmark \quad \text{se cumple.}$$

Luego, existe punto de intersección entre las rectas L_1 y L_2, es decir las rectas se cortan y el punto viene dado por

$$\begin{cases} x = -3 + (1) \\ y = 1 - 2(1) \\ z = -3(1) \end{cases} = \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \\ z = -3 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad R(-2, -1, -3).$$

★

Ejemplo 96 *: Demuestre que las rectas*

$$L_1 : x - 2 = y - 1 = -\frac{z}{2} \qquad y \qquad L_2 : \frac{x-2}{3} = -\frac{y}{2} = \frac{z-2}{2}.$$

no son paralelas y no tienen puntos en común.

Demostración : Es conocido que dos rectas, en $\mathbb{R}^3$, son paralelas si sus vectores directores son paralelos y dos vectores, $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son paralelos si

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0},$$

puesto que, los vectores directores de las rectas L_1 y L_2 son

$$\boldsymbol{v_1} = (1, 1, -2) \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{v_2} = (3, -2, 2),$$

respectivamente, entonces

$$\boldsymbol{v_1} \times \boldsymbol{v_2} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - \boldsymbol{j} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \boldsymbol{k} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= ((1)(2) - (-2)(-2))\,\boldsymbol{i} - ((1)(2) - (-2)(3))\,\boldsymbol{j} + ((1)(-2) - (1)(3))\,\boldsymbol{k}$$

$$= -2\boldsymbol{i} - 8\boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k} = (-2, -8, -5) \neq (0, 0, 0) = \boldsymbol{0},$$

por lo tanto, las rectas dadas **NO** son paralelas.

Buscamos el punto R que pertenezca a las rectas L_1 y L_2, para ello escribimos las rectas en sus ecuaciones paramétricas e igualamos las respectivas variables

$$L_1 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = -2t \end{cases} \qquad \text{y} \qquad L_2 : \begin{cases} x = 2 + 3s \\ y = -2s \\ z = 2 + 2s \end{cases},$$

de aquí,

$$\begin{cases} 2+t=2+3s \\ 1+t=-2s \\ -2t=2+2s \end{cases} \qquad \overset{\text{de la } 1^{\text{ra}} \text{ ecuación}}{\Longrightarrow} \qquad t=3s,$$

sustituimos en la 2^{da} ecuación

$$1+(3s)=-2s \qquad \Longrightarrow \qquad 5s=-1 \qquad \Longrightarrow \qquad s=-\frac{1}{5},$$

por lo que, $t=3\left(-\frac{1}{5}\right)=-\frac{3}{5}$. Sustituimos el valor de t y de s en la tercera ecuación, $2+2s+2t=0$ para saber si se satisface

$$2+2\left(-\frac{1}{5}\right)+2\left(-\frac{3}{5}\right)=2-\frac{2}{5}-\frac{6}{5}=2-\frac{8}{5}=\frac{2}{5} \qquad \chi \qquad \text{no se cumple.}$$

Luego, **NO** existe punto de intersección entre las rectas L_1 y L_2, es decir las rectas no se cortan. ★

Ejemplo 97 : *Hallar, si existe, el punto de intersección entre las rectas*

$$L_1 : x-2=y-1=\frac{3-z}{2} \qquad y \qquad L_2 : x+1=\frac{y-4}{2}=\frac{1-z}{3}.$$

Solución : En primer lugar, veamos si las rectas se cortan o se cruzan, si se cortan, entonces hay un punto común entre ellas, en caso contrario, es decir, si se cruzan, entonces no tienen punto en común.

Es conocido que si

- L_1 es una recta que pasa por el punto P_1 y tiene como vector director a $\boldsymbol{v_1}$.
- L_2 es una recta que pasa por el punto P_2 y tiene como vector director a $\boldsymbol{v_2}$,

entonces

- Si $\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=0$, se tiene que las rectas se cortan.
- Si $\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\neq 0$, se tiene que las rectas se cruzan.

Así,

1. Para la recta $L_1 : x-2=y-1=\frac{3-z}{2}$. El vector director es $\boldsymbol{v_1}=(2,1,-2)$ y pasa por el punto $P_1(2,1,3)$.
2. Para la recta $L_2 : x+1=\frac{y-4}{2}=\frac{1-z}{3}$. El vector director es $\boldsymbol{v_2}=(1,2,-3)$ y pasa por el punto $P_2(-1,4,1)$.

Entonces

$$\overrightarrow{P_1P_2}=(-1,4,1)-(2,1,3)=(-3,3,-2),$$

con lo que

$$\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=\begin{vmatrix} -3 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}=(-3)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}-(3)\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}+(-2)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=(-3)(-3-(-4))-(3)(-6-(-2))+(-2)(2-2)=-3+12+0=9\neq 0,$$

concluimos que las rectas se cruzan, por lo tanto **NO** tienen punto de intersección. ★

Ejemplo 98 *: Demuestre que las rectas*

$$L_1 : x - 2 = y - 1 = \frac{3 - z}{2} \qquad y \qquad L_2 : x + 1 = \frac{y - 4}{2} = \frac{1 - z}{3}.$$

se cruzan.

Demostración : Es conocido que si

- L_1 es una recta que pasa por el punto P_1 y tiene como vector director a $\boldsymbol{v_1}$.
- L_2 es una recta que pasa por el punto P_2 y tiene como vector director a $\boldsymbol{v_2}$,

entonces

- Si $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = 0$, se tiene que las rectas se cortan.
- Si $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \neq 0$, se tiene que las rectas se cruzan.

Así,

1. Para la recta $L_1 : x - 2 = y - 1 = \frac{3 - z}{2}$. El vector director es $\boldsymbol{v_1} = (2, 1, -2)$ y pasa por el punto $P_1(2, 1, 3)$.
2. Para la recta $L_2 : x + 1 = \frac{y - 4}{2} = \frac{1 - z}{3}$. El vector director es $\boldsymbol{v_2} = (1, 2, -3)$ y pasa por el punto $P_2(-1, 4, 1)$.

Entonces

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (-1, 4, 1) - (2, 1, 3) = (-3, 3, -2),$$

con lo que

$$\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = \begin{vmatrix} -3 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-3) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - (3) \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-3)(-3 - (-4)) - (3)(-6 - (-2)) + (-2)(2 - 2) = -3 + 12 + 0 = 9 \neq 0,$$

concluimos que las rectas se cruzan. ★

Ejemplo 99 *: Hallar las ecuaciones paramétricas y forma simétricas de la recta que pasa por el punto $P(-2, 1, 2)$ y es paralela a la recta $L : \frac{1 - x}{3} = \frac{y + 2}{2}$, $z = 3$.*

Solución : Para escribir las ecuaciones de una recta, en $\mathbb{R}^3$, necesitamos conocer:

- Las coordenadas de un punto por donde pasa la recta. En este ejemplo $P(-2, 1, 2)$.
- El vector director. Este vector tiene que ser paralelo a la recta buscada, puesto que, la recta buscada tiene que ser paralela a la recta L, entonces el vector director de la recta buscada es el vector director de la recta dada, $\boldsymbol{v} = (-3, 2, 0)$.

Entonces, las ecuaciones paramétricas de la recta buscada son

$$L : \begin{cases} x - (-2) = -3t \\ y - 1 = 2t \\ z - 6 = 0 \end{cases} = \begin{cases} x = -2 - 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = 6 \end{cases}$$

y la ecuación forma simétrica se obtiene despejando el parámetro t de las ecuaciones paramétricas de la recta, así,

$$L: \begin{cases} x-(-2)=-3t \\ y-1=2t \\ z-6=0 \end{cases} = \begin{cases} t=\dfrac{x+2}{-3} \\ t=\dfrac{y-1}{2} \\ z=6 \end{cases}$$

por lo que la ecuación forma simétrica viene dada por

$$\frac{x+2}{-3}=\frac{y-1}{2}, \qquad z=6 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{x+2}{3}=\frac{1-y}{2}, \qquad z=6.$$

★

Ejemplo 100 *: Hallar las ecuaciones paramétricas y forma simétricas de la recta que pasa por el punto* $P(0,-3,5)$ *y es perpendicular a las rectas*

$$L_1: \begin{cases} x=-2-3t \\ y=5t \\ z=1-2t \end{cases} \qquad y \qquad L_2: 3-x=\frac{y-3}{2}=\frac{4-z}{2}.$$

Solución : Para escribir las ecuaciones de una recta, en $\mathbb{R}^3$, necesitamos conocer:

- Las coordenadas de un punto por donde pasa la recta. En este ejemplo $P(0,-3,5)$.
- El vector director. Este vector tiene que ser paralelo a la recta buscada, puesto que, la recta buscada debe ser perpendicular a las rectas L_1 y L_2, buscamos un vector que sea paralelo a la recta buscada, es decir, perpendicular a las rectas dadas, por lo tanto perpendicular a sus vectores directores, es conocido que un vector perpendicular a dos vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ viene dado por su producto vectorial $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

  Los vectores directores de las rectas L_1 y L_2 son

  $$\boldsymbol{v_1}=(-3,5,-2) \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{v_2}=(-1,2,-2),$$

  respectivamente, entonces

  $$\boldsymbol{v_1}\times\boldsymbol{v_2}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -3 & 5 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - \boldsymbol{j}\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + \boldsymbol{k}\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

  $$= ((5)(-2)-(-2)(2))\,\boldsymbol{i} - ((-3)(-2)-(-2)(-1))\,\boldsymbol{j} + ((-3)(2)-(5)(-1))\,\boldsymbol{k}$$

  $$= -6\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}=(-6,-4,-1),$$

  entonces el vector director de la recta buscada es $\boldsymbol{v}=(-6,-4,-1)$ o cualquier vector múltiplo escalar de él, por ejemplo $\boldsymbol{a}=(6,4,1)$.

Entonces, las ecuaciones paramétricas de la recta buscada son

$$L: \begin{cases} x-0=6t \\ y-(-3)=4t \\ z-5=t \end{cases} = \begin{cases} x=6t \\ y=-3+4t \\ z=5+t \end{cases}$$

y la ecuación forma simétrica se obtiene despejando el parámetro t de las ecuaciones paramétricas de la recta, así,

$$L:\left\{\begin{array}{l} x=6t \\ y-(-3)=4t \\ z-5=t \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{l} t=\dfrac{x}{6} \\ t=\dfrac{y+3}{4} \\ t=z-5 \end{array}\right.$$

por lo que la ecuación forma simétrica viene dada por

$$\frac{x}{6}=\frac{y+3}{4}=z-5.$$

★

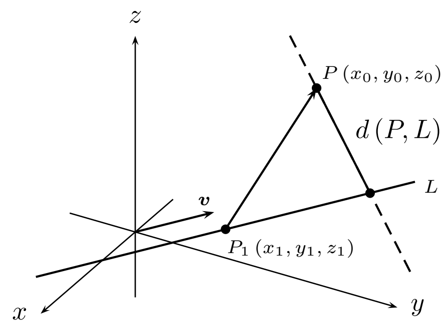
Ejemplo 101 *: Demostrar que la distancia entre la recta $L:\boldsymbol{x}=\overline{OP_1}+\boldsymbol{v}t$ y el punto P, que no pertenece a la recta, viene dada por*

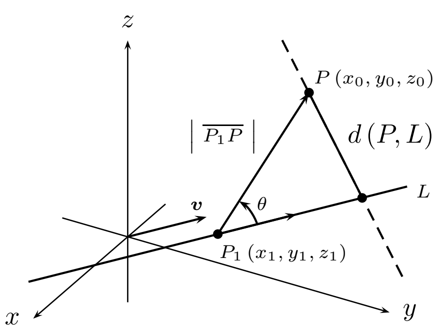
$$d(P,L)=\frac{\left|\overline{P_1P}\times\boldsymbol{v}\right|}{|\boldsymbol{v}|}.$$

Demostración : La distancia entre

- Una recta L, que pasa por el punto $P_1(x_1,y_1,z_1)$ con vector director $\boldsymbol{v}$.
- Un punto $P(x_0,y_0,z_0)$, que no pertenece a la recta,

la cual denotamos por $d(P,L)$, se obtiene sobre la recta perpendicular a L que pasa por el punto P.





Si θ es el ángulo entre el vector $\overline{P_1P}$ y el vector director, $\boldsymbol{v}$, de la recta L, entonces, por trigonométria

$$\operatorname{sen}\theta=\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}=\frac{d(L,P)}{\left|\overline{P_1P}\right|},$$

por lo que,

$$d(P,L)=\left|\overline{P_1P}\right|\operatorname{sen}\theta.$$

Por otra parte, es conocido que

$$\left|\overline{P_1P}\times\boldsymbol{v}\right|=\left|\overline{P_1P}\right||\boldsymbol{v}|\operatorname{sen}\theta,$$

despejamos $\operatorname{sen}\theta$, obtenemos

$$\operatorname{sen}\theta=\frac{\left|\overline{P_1P}\times\boldsymbol{v}\right|}{\left|\overline{P_1P}\right||\boldsymbol{v}|},$$

por lo tanto,

$$d(P,L)=\left|\overline{P_1P}\right|\operatorname{sen}\theta=\left|\overline{P_1P}\right|\frac{\left|\overline{P_1P}\times\boldsymbol{v}\right|}{\left|\overline{P_1P}\right||\boldsymbol{v}|}=\frac{\left|\overline{P_1P}\times\boldsymbol{v}\right|}{|\boldsymbol{v}|}.$$

Luego,

$$\boxed{d(P,L)=\frac{\left|\overline{P_1P}\times\boldsymbol{v}\right|}{|\boldsymbol{v}|}.}$$

★

Ejemplo 102 *: Hallar la distancia entre la recta* $L: \dfrac{x-3}{3} = y+2, \ \ z=4$ *y el punto* $P(-2,1,1)$.

Solución : Por el ejemplo 101, se tiene que

$$d(P,L) = \frac{\left|\overline{P_1P} \times \boldsymbol{v}\right|}{|\boldsymbol{v}|},$$

donde P_1 es el punto por donde pasa la recta dada y $\boldsymbol{v}$ su vector director.

De la recta L se tiene que $P_1(3,-2,4)$ y el vector director viene dado por $\boldsymbol{v}=(3,1,0)$, así,

$$\overline{P_1P} = (-2,1,1) - (3,-2,4) = (-5,3,-3),$$

de aquí,

$$\overline{P_1P} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -5 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \boldsymbol{j}\begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + \boldsymbol{k}\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= ((3)(0) - (-3)(1))\,\boldsymbol{i} - ((-5)(0) - (-3)(3))\,\boldsymbol{j} + ((-5)(1) - (3)(3))\,\boldsymbol{k}$$

$$= 3\boldsymbol{i} - 9\boldsymbol{j} - 11\boldsymbol{k} = (3,-9,-11),$$

es decir,

$$\overline{P_1P} \times \boldsymbol{v} = (3,-9,-11).$$

Calculamos las longitudes de los vectores $\overline{P_1P} \times \boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{v}$

$$\left|\overline{P_1P} \times \boldsymbol{v}\right| = \sqrt{(3)^2 + (9)^2 + (11)^2} = \sqrt{211}, \qquad \text{y} \qquad |\boldsymbol{v}| = \sqrt{(3)^2 + (1)^2 + (0)^2} = \sqrt{10},$$

entonces

$$d(P,L) = \frac{\sqrt{211}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2110}}{10}.$$

★

Ejemplo 103 *: Hallar la distancia entre la recta* $L: \dfrac{x+2}{5} = \dfrac{y+2}{7} = 4-z,$ *y el punto* $P(8,12,2)$.

Solución : Por el ejemplo 101, se tiene que

$$d(P,L) = \frac{\left|\overline{P_1P} \times \boldsymbol{v}\right|}{|\boldsymbol{v}|},$$

donde P_1 es el punto por donde pasa la recta dada y $\boldsymbol{v}$ su vector director.

De la recta L se tiene que $P_1(-2,-2,4)$ y el vector director viene dado por $\boldsymbol{v}=(5,7,-1)$, así,

$$\overline{P_1P} = (8,12,2) - (-2,-2,4) = (10,14,-2),$$

de aquí,

$$\overline{P_1P} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 10 & 14 & -2 \\ 5 & 7 & -1 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}\begin{vmatrix} 14 & -2 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} - \boldsymbol{j}\begin{vmatrix} 10 & -2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + \boldsymbol{k}\begin{vmatrix} 10 & 14 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= ((14)(-1) - (-2)(7))\,\boldsymbol{i} - ((10)(-1) - (-2)(5))\,\boldsymbol{j} + ((10)(7) - (14)(5))\,\boldsymbol{k}$$

$$= 0\boldsymbol{i} - 0\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k} = (0,0,0),$$

es decir,

$$\overline{P_1P} \times \boldsymbol{v} = (0,0,0),$$

de aquí,

$$\left|\overline{P_1P} \times \boldsymbol{v}\right| = \sqrt{(0)^2 + (0)^2 + (0)^2} = 0,$$

entonces

$$d(P,L) = 0,$$

con lo que concluimos que el punto P pertenece a la recta L. ★

Ejemplo 104 *: Escribir la ecuación del plano que pasa por el punto $P(1,2,3)$ y tiene como vector normal a $\boldsymbol{n} = (-1,4,2)$.*

Solución : Sea $Q(x,y,z)$ un punto cualquiera del plano buscado, consideramos, el vector

$$\overline{PQ} = (x-1, y-2, z-3),$$

el cual pertenece al plano y por ende, es perpendicular al vector $\boldsymbol{n} = (-1,4,2)$, entonces, se satisface

$$\boldsymbol{n} \cdot \overline{PQ} = 0, \qquad \text{es decir,} \qquad (-1,4,2) \cdot (x-1, y-2, z-3) = 0,$$

resolvemos,

$$(-1)(x-1) + (4)(y-2) + (2)(z-3) = 0,$$

de aquí,

$$-x + 1 + 4y - 8 + 2z - 6 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad -x + 4y + 2z = 13.$$

Luego, la ecuación del plano buscado es

$$\boxed{\pi : -x + 4y + 2z = 13.}$$

★

Ejemplo 105 *: Escribir la ecuación del plano que pasa por los puntos $P(1,-2,0)$, $Q(2,1,-1)$ y $R(3,0,-3)$.*

Solución : Buscamos la ecuación del plano; π, que contiene a los puntos P, Q y R, es conocido que, para obtener la ecuación de un plano se debe conocer

- El vector normal al plano, es decir, un vector perpendicular al plano.
- Un punto por donde pasa el plano, en este ejemplo podemos considerar cualquiera de los tres puntos dados, P, Q o R, para escribir la ecuación del plano.

Consideremos los vectores $\overline{PQ}$ y $\overline{QR}$, es decir, los vectores

$$\overline{PQ} = \overline{0Q} - \overline{0P} = (2,1,-1) - (1,-2,0) = (1,3,-1)$$

y

$$\overline{QR} = \overline{0R} - \overline{0Q} = (3,0,-3) - (2,1,-1) = (1,-1,-2),$$

los cuales pertenecen al plano buscado, π.

Es conocido que el vector dado por $\overline{PQ} \times \overline{QR}$, es un vector perpendicular tanto al vector $\overline{PQ}$, como al vector $\overline{QR}$, como estos vectores pertenecen al plano, entonces, el vector $\overline{PQ} \times \overline{QR}$, es perpendicular al plano, así, el vector normal al plano buscado es $\boldsymbol{n} = \overline{PQ} \times \overline{QR}$ o un múltiplo escalar de él.

$$\boldsymbol{n} = \overline{PQ} \times \overline{QR} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - \boldsymbol{j} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \boldsymbol{k} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= ((3)(-2) - (-1)(-1))\,\boldsymbol{i} - ((1)(-2) - (-1)(1))\,\boldsymbol{j} + ((1)(-1) - (3)(1))\,\boldsymbol{k}$$

$$= -7\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k} = (-7, 1, -4),$$

es decir,

$$\boldsymbol{n} = (-7, 1, -4),$$

o, equivalentemente, cualquier múltiplo escalar de él.

Sea $B(x, y, z)$ un punto cualquiera del plano buscado, tomamos el punto $P(1, -2, 0)$, para obtener la ecuación del plano π, consideramos el vector

$$\overline{PB} = (x - 1, y - (-2), z - 0) = (x - 3, y + 2, z),$$

el cual pertenece al plano y por ende, es perpendicular al vector $\boldsymbol{n} = (-7, 1, -4)$, entonces, se satisface

$$\boldsymbol{n} \cdot \overline{PB} = 0, \qquad \text{es decir,} \qquad (-7, 1, -4) \cdot (x - 1, y + 2, z) = 0,$$

resolvemos,

$$(-7)(x - 1) + (1)(y + 2) + (-4)(z) = 0,$$

de aquí,

$$-7x + 7 + y + 2 - 4z = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad 7x - y + 4z = 9.$$

Luego, la ecuación del plano buscado es

$$\boxed{\pi : 7x - y + 4z = 9.}$$

★

Ejemplo 106 *: Escribir las ecuación del plano que contiene las rectas* $L_1 : \boldsymbol{x} = (3, 1, 2) + t(1, -1, 2)$ *y* $L_2 : \boldsymbol{x} = (3, 1, 2) + t(3, 2, -1)$.

Solución : Es conocido que, para obtener la ecuación de un plano se debe conocer

- El vector normal al plano, es decir, un vector perpendicular al plano.
- Un punto por donde pasa el plano.

Calculamos el vector normal del plano buscado, π, es decir, debemos hallar un vector que sea perpendicular al plano, puesto que, las rectas L_1 y L_2 están contenidas en el plano buscado, π, entonces sus vectores directores son paralelos a π, por lo tanto, el producto vectorial entre esos vectores directores es perpendicular a ellos y por ende al plano π.

Calculamos el producto vectorial entre el vector director de la recta L_1, $\boldsymbol{a} = (1, -1, 2)$, y el vector director de la recta L_2, $\boldsymbol{b} = (3, 2, -1)$,

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-3, 7, 5),$$

por lo dicho anteriormente, este vector es perpendicular tanto al vector director $\boldsymbol{a}$ como al vector director $\boldsymbol{b}$, así, el vector normal al plano que contiene a las dos rectas es

$$\boldsymbol{n} = (-3, 7, 5),$$

luego, la ecuación del plano viene dada por

$$-3(x-3)+7(y-1)+5(z-2)=0,$$

es decir,

$$\boxed{\pi: -3x+7y+5z=8.}$$

★

Ejemplo 107 *: Hallar el punto o los puntos, si existen, de intersección entre los planos*

$$\pi_1: 2x-3y-4z=2 \qquad y \qquad \pi_2: x+4y-5z=0.$$

Solución : Para obtener la intersección entre los tres planos resolvemos el sistema dado por

$$\begin{cases} 2x-3y-4z=2 \\ x+4y-5z=0 \end{cases}$$

Consideramos la matriz aumentada del sistema

$$(A \mid \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -4 & 2 \\ 1 & 4 & -5 & 0 \end{array}\right).$$

Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada para transformar dicha matriz en una versión de su forma escalonada (método de eliminación gaussiana)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -4 & 2 \\ 1 & 4 & -5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -5 & 0 \\ 2 & -3 & -4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{-2F_1+F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & -11 & 6 & 2 \end{array}\right),$$

entonces,

$$\begin{cases} \text{De la segunda fila} \ : \ -11y+6z=2 \\ \text{De la primera fila} \ : \ x+4y-5z=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \boxed{y=\dfrac{6}{11}z-\dfrac{2}{11}.} \\ x+4y-5z=0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad x+4\left(\frac{6}{11}z-\frac{2}{11}\right)-5z=0 \quad \Longrightarrow \quad x+\frac{24}{11}z-\frac{8}{11}-5z=0$$

$$\Longrightarrow \quad x-\frac{31}{11}z-\frac{8}{11}=0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x=\frac{8}{11}+\frac{31}{11}z.}$$

Así, los planos se intersectan en los puntos $P(x,y,z)$ de la forma

$$P\begin{pmatrix} \dfrac{8}{11}+\dfrac{31}{11}z \\ \dfrac{6}{11}z-\dfrac{2}{11} \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{con} \qquad z\in\mathbb{R},$$

es decir, si $z=t$, entonces los planos tienen como intersección una recta, L, de ecuaciones paramétricas

$$L: \begin{cases} x=\dfrac{8}{11}+\dfrac{31}{11}t \\ y=-\dfrac{2}{11}+\dfrac{6}{11}t \\ z=t. \end{cases}$$

★

Ejemplo 108 *: Hallar la inetrsección, si existe, entre los planos*

$$\pi_1 : -4x + 2y + 4z = 1, \qquad \pi_2 : 6x - 2y - 5z = 0 \qquad y \qquad \pi_3 : -6x + 4y + 7z = 3.$$

Solución : Para obtener la intersección entre los tres planos resolvemos el sistema dado por

$$\begin{cases} -4x + 2y + 4z = 1 \\ \ \ 6x - 2y - 5z = 0 \\ -6x + 4y + 7z = 3 \end{cases}$$

Consideramos la matriz aumentada del sistema

$$(A \mid \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{rrr|r} -4 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & -2 & -5 & 0 \\ -6 & 4 & 7 & 3 \end{array}\right).$$

Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada para transformar dicha matriz en una versión de su forma escalonada (método de eliminación gaussiana)

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -4 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & -2 & -5 & 0 \\ -6 & 4 & 7 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{4}F_1 \to F_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -\dfrac{1}{2} & -1 & -\dfrac{1}{4} \\ 6 & -2 & -5 & 0 \\ -6 & 4 & 7 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{-6F_1 + F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -\dfrac{1}{2} & -1 & -\dfrac{1}{4} \\ 0 & 1 & 1 & \dfrac{3}{2} \\ -6 & 4 & 7 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{6F_1 + F_3 \to F_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -\dfrac{1}{2} & -1 & -\dfrac{1}{4} \\ 0 & 1 & 1 & \dfrac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 & \dfrac{3}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{-F_2 + F_3 \to F_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -\dfrac{1}{2} & -1 & -\dfrac{1}{4} \\ 0 & 1 & 1 & \dfrac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

entonces,

$$\begin{cases} \text{De la segunda fila} \ : \ y + z = \dfrac{3}{2} \\ \text{De la primera fila} \ : \ x - \dfrac{1}{2}\, y - z = -\dfrac{1}{4} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \boxed{z = \dfrac{3}{2} - y} \\ x - \dfrac{1}{2}\, y - z = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad x - \frac{1}{2}\, y - \left(\frac{3}{2} - y\right) = -\frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad x + \frac{1}{2}\, y - \frac{3}{2} = -\frac{1}{4}$$

$$\Longrightarrow \quad x = -\frac{1}{2}\, y - \frac{1}{4} + \frac{3}{2} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x = -\frac{1}{2}\, y + \frac{5}{4}.}$$

Así, los planos se intersectan en los puntos $P(x, y, z)$ de la forma

$$P\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2}\, y + \dfrac{5}{4} \\ y \\ \dfrac{3}{2} - y \end{pmatrix} \qquad \text{con} \quad y \in \mathbb{R},$$

es decir, si $y = t$, entonces los planos tienen como intersección una recta, L, de ecuaciones paramétricas

$$L : \begin{cases} x = \dfrac{5}{4} - \dfrac{1}{2}\, t \\ y = t \\ z = \dfrac{3}{2} - t. \end{cases}$$

★

Ejemplo 109 *: Hallar la inetrsección, si existe, entre los planos*

$$\pi_1 : 3x + 6y - 2z = 1, \qquad \pi_2 : x + y - 3z = 6 \qquad y \qquad \pi_3 : 2x + 2y - 6z = 5.$$

Solución : Para obtener la intersección entre los tres planos resolvemos el sistema dado por

$$\begin{cases} 3x + 6y - 2z = 1 \\ x + y - 3z = 6 \\ 2x + 2y - 6z = 5 \end{cases}$$

Consideramos la matriz aumentada del sistema

$$(A \mid \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 6 \\ 2 & 2 & -6 & 5 \end{array}\right).$$

Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada para transformar dicha matriz en una versión de su forma escalonada (método de eliminación gaussiana)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 6 \\ 2 & 2 & -6 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \longleftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -6 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{-3F_1 + F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & 7 & -17 \\ 2 & 2 & -6 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-2F_1 + F_3 \to F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & 7 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right).$$

Observemos la última fila de esta matriz, se tiene que

$$0x + 0y + 0z = -7 \qquad \Longrightarrow \qquad 0 = -7 \quad \longleftarrow \quad \text{No tiene sentido, contradicción.}$$

Por lo que concluimos que el sistema **no tiene solución**, es decir, los tres planos **NO** se intersectan. ★

Ejemplo 110 *: Hallar la inetrsección, si existe, entre los planos*

$$\pi_1 : 2x + 5y - z = 1, \qquad \pi_2 : 7y - 2z = -1 \qquad y \qquad \pi_3 : -x + 3y - z = 2.$$

Solución : Para obtener la intersección entre los tres planos resolvemos el sistema dado por

$$\begin{cases} 2x + 5y - z = 1 \\ 7y - 2z = -1 \\ -x + 3y - z = 2 \end{cases}$$

Consideramos la matriz aumentada del sistema

$$(A \mid \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada para transformar dicha matriz en una versión de su forma escalonada (método de eliminación gaussiana)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \longleftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_1 \to F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 7 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-2F_1+F_3 \to F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 7 & -2 & -1 \\ 0 & 11 & -3 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{7}F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -\dfrac{2}{7} & -\dfrac{1}{7} \\ 0 & 11 & -3 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-11F_2+F_3 \to F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -\dfrac{2}{7} & -\dfrac{1}{7} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{7} & \dfrac{46}{7} \end{array}\right),$$

entonces,

$$\left\{\begin{array}{l} \text{De la tercera fila } : \ \dfrac{1}{7}\, z = \dfrac{46}{7} \\ \\ \text{De la segunda fila } : \ y - \dfrac{2}{7}\, z = -\dfrac{1}{7} \\ \\ \text{De la primera fila } : \ x - 3y + z = 2 \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{l} \boxed{z = 46} \\ \\ y - \dfrac{2}{7}\, z = -\dfrac{1}{7} \\ \\ x - 3y + z = 2 \end{array}\right.$$

$$\implies \left\{\begin{array}{l} y - \dfrac{2}{7}(46) = -\dfrac{1}{7} \\ \\ x - 3y + (46) = 2 \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{l} y = \dfrac{92}{7} - \dfrac{1}{7} \\ \\ x - 3y = 2 - 46 \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{l} \boxed{y = 13} \\ \\ z - 3y = -44 \end{array}\right.$$

$$\implies \quad x - 3\,(13) = -44 \quad \implies \quad x = 39 - 44 \quad \implies \quad \boxed{x = -5.}$$

La solución del sistema es el punto $P\,(-5, 13, 46)$, es decir, los planos se intersectan en un punto. ★

Ejemplo 111 *: Hallar el valor o los valores de la constante* λ *para que los planos*

$$\pi_1 : x + 3y + z = 2, \qquad \pi_2 : x + 2y - 5z = 4 \qquad y \qquad \pi_3 : 2x + 5y - \lambda^2 z = \lambda + 4.$$

1. *Tenga un solo punto en común. Hallar ese punto de intersección.*
2. *Se intersecten en una recta. Halle la ecuaciones paramétricas de esa recta*
3. *No tenga puntos en común.*

Solución : Para conocer el valor o los valores de λ, resolvemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} x+3y+z=2 \\ x+2y-5z=4 \\ 2x+5y-\lambda^2 z=\lambda+4 \end{cases}$$

Tenemos que las matrices del sistema son

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & -\lambda^2 \end{pmatrix}, \qquad \overline{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \overline{b}=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ \lambda+4 \end{pmatrix},$$

la matriz aumentada es

$$\left(A \mid \overline{b}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -5 & 4 \\ 2 & 5 & -\lambda^2 & \lambda+4 \end{array}\right).$$

Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada (que es equivalente a aplicar las operaciones elementales a la matriz de coeficientes) para transformar dicha matriz en una versión de su forma escalonada (método de eliminación gaussiana)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -5 & 4 \\ 2 & 5 & -\lambda^2 & \lambda+4 \end{array}\right) \xrightarrow[-2F_1+F_3\to F_3]{-F_1+F_2\to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -6 & 2 \\ 0 & -1 & -2-\lambda^2 & \lambda \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-F_2\to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & -1 & -2-\lambda^2 & \lambda \end{array}\right) \xrightarrow{F_2+F_3\to F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 4-\lambda^2 & \lambda-2 \end{array}\right),$$

es decir, la matriz se puede escribir como

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & (2-\lambda)(2+\lambda) & \lambda-2 \end{array}\right).$$

Estudiamos los casos según los posibles valores de λ.

(a) Si $\lambda\neq 2$, tenemos que

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & (2-\lambda)(2+\lambda) & \lambda-2 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2-\lambda}\ F_2\to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 2+\lambda & \dfrac{\lambda-2}{2-\lambda} \end{array}\right),$$

de aquí,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 2+\lambda & -1 \end{array}\right) \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} \text{De la primera fila}: & x+3y+z=2 \\ \text{De la segunda fila}: & y+6z=-2 \\ \text{De la tercera fila}: & (2+\lambda)\,z=-1. \end{cases}.$$

- Como $\lambda \neq -2$, entonces despejamos z de la ecuación dada por la tercera fila, se tiene

$$(2+\lambda)\, z = -1 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{z = -\frac{1}{2+\lambda}.}$$

- De la segunda fila, se tiene

$$y + 6z = -2 \qquad \Longrightarrow \qquad y = -2 - 6\left(-\frac{1}{2+\lambda}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad y = -2 + \frac{6}{2+\lambda}$$

$$\Longrightarrow \qquad y = \frac{-2\,(2+\lambda) + 6}{2+\lambda} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{y = -\frac{2\,(\lambda-1)}{\lambda+2}.}$$

- De la primera fila, se tiene

$$x + 3y + z = 2 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 2 - 3\left(-\frac{2\,(\lambda-1)}{\lambda+2}\right) - \left(-\frac{1}{\lambda+2}\right)$$

$$\Longrightarrow \qquad x = 2 + \frac{6\,(\lambda-1)}{\lambda+2} + \frac{1}{\lambda+2} \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{2\,(\lambda+2) + 6\,(\lambda-1) + 1}{\lambda+2}$$

$$\Longrightarrow \qquad x = \frac{2\lambda + 4 + 6\lambda - 6 + 1}{\lambda+2} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{x = \frac{8\lambda - 1}{\lambda+2},}$$

por lo tanto, el sistema tiene una única solución, la cual viene dada por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{8\lambda-1}{\lambda+2} \\ -\dfrac{2\,(\lambda-1)}{\lambda+2} \\ -\dfrac{1}{\lambda+2} \end{pmatrix}.$$

(b) Si $\lambda = 2$, la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & (2-\lambda)(2+\lambda) & \lambda - 2 \end{array}\right)$$

queda

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & (2-(2))(2+(2)) & (2) - 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

de aquí, concluimos que el sistema tiene infinitas soluciones, hallamos dichas soluciones

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{De la primera fila} \; : \; x + 3y + z = 2 \\ \text{De la segunda fila} \; : \; y + 6z = -2. \end{array} \right. .$$

- De la segunda fila, se tiene

$$y + 6z = -2 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{y = -2 - 6z.}$$

- De la tercera fila, se tiene

$$x+3y+z=2 \quad\Longrightarrow\quad x=2-3(-2-6z)-z \quad\Longrightarrow\quad \boxed{x=17z+8.}$$

Así, las infinitas soluciones son

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17z+8 \\ -6z-2 \\ z \end{pmatrix}, \qquad \text{con} \quad z\in\mathbb{R}.$$

(c) Si $\lambda=-2$, obtenemos la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & (2-(-2))(2+(-2)) & (-2)-2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right),$$

de la tercera fila se tiene

$$0x+0y+0z=-4 \quad\Longrightarrow\quad 0=-4,$$

lo cual es una contradicción, por lo que concluimos que el sistema no tiene solución.

★

Ejemplo 112 : *Hallar el valor o los valores de las constantes a y b para que los planos*

$$\pi_1 : 3x-4y+7z=b-11, \qquad \pi_2 : x-y+2z=-3,$$

$$\pi_3 : 2x-y+3z=-4, \qquad \pi_4 : -x+3y+(a-4)z=b+7.$$

1. *Tenga un solo punto en común. Hallar ese punto de intersección.*
2. *Se intersecten en una recta. Halle la ecuaciones paramétricas de esa recta*
3. *No tenga puntos en común.*

Solución : Para conocer el valor o los valores de a y b, resolvemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} 3x-4y+7z=b-11 \\ x-y+2z=-3 \\ 2x-y+3z=-4 \\ -x+3y+(a-4)z=b+7 \end{cases}$$

Tenemos que las matrices del sistema son

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 7 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & a-4 \end{pmatrix}, \qquad \overline{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \overline{b}=\begin{pmatrix} b-11 \\ -3 \\ -4 \\ b+7 \end{pmatrix}$$

la matriz aumentada es

$$\left(A \mid \overline{b}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 7 & b-11 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & -4 \\ -1 & 3 & a-4 & b+7 \end{array}\right).$$

Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada (que es equivalente a aplicar las operaciones elementales a la matriz de coeficientes) para transformar dicha matriz en una versión de su forma escalonada (método de eliminación gaussiana)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 7 & b-11 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & -4 \\ -1 & 3 & a-4 & b+7 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \longleftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 7 & b-11 \\ 2 & -1 & 3 & -4 \\ -1 & 3 & a-4 & b+7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1+F_4 \to F_4]{\substack{-3F_1+F_2 \to F_2 \\ -2F_1+F_3 \to F_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & b-2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & a-2 & b+4 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2-b \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & a-2 & b+4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{-F_2+F_3 \to F_3 \\ -2F_2+F_4 \to F_4}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2-b \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & a & 3b \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2-b \\ 0 & 0 & a & 3b \\ 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right).$$

Estudiamos los casos según los posibles valores de a y b.

(i) Si $b = 0$ y $a \neq 0$, tenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2-(0) \\ 0 & 0 & a & 3\,(0) \\ 0 & 0 & 0 & (0) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

entonces, el sistema tiene una única solución, la cual viene dada por

- De la fila 3, se tiene

$$az = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{z = 0.}$$

- De la fila 2, se tiene

$$y - z = 2 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{y = 2.}$$

- De la fila 1, se tiene

$$x - y + 2z = -3 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{x = -1.}$$

Así, la única solución es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) Si $b=0$ y $a=0$, tenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2-(0) \\ 0 & 0 & (0) & 3\,(0) \\ 0 & 0 & 0 & (0) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

entonces, el sistema tiene infinitas soluciones, las cuales vienen dada por

- De la fila 2, se tiene:

$$y-z=2 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{y=2+z.}$$

- De la fila 1, se tiene:

$$x-y+2z=-3 \qquad \Longrightarrow \qquad x=-3+(2+z)-2z \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{x=-z-1.}$$

Así, las infinitas soluciones son

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z-1 \\ z+2 \\ z \end{pmatrix}, \qquad \text{con} \quad z \in \mathbb{R}.$$

(iii) Si $b \neq 0$, tenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2-b \\ 0 & 0 & a & 3b \\ 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right),$$

entonces, de la fila 4 se tiene

$$0x+0y+0z=b \qquad \Longrightarrow \qquad 0=b,$$

lo cual es una contradicción, por lo que el sistema no tiene solución. ★

Ejemplo 113 *: Sean la recta* $L_1 : \dfrac{9-3x}{6} = \dfrac{1-y}{2} = \dfrac{z-2}{4}$ *y el plano* $\pi_1 : 3x-2y+6z=-5$.

1. *Hallar la ecuación de la recta* L_2 *perpendicular al plano* π_1 *y que pasa por el origen.*
2. *Hallar la ecuación del plano* π_2 *que contiene a la recta* L_1 *y que pasa por el origen.*

Solución : *a*. Tenemos que si L_2 es perpendicular al plano π_1, entonces su vector director debe ser múltiplo escalar del vector director del plano π_1, el cual es $\boldsymbol{n}=(3,-2,6)$. Luego, las ecuaciones paramétricas de la recta deseada es

$$x=3t; \qquad y=-2t; \qquad z=6t.$$

b. El plano deseado contiene a la recta de vector director $\boldsymbol{a}=(-2,-2,4)$ que es paralelo al vector

$$\boldsymbol{b}=(-1,-1,2).$$

Generamos el vector de coordenadas $\overline{\boldsymbol{OP}}$, donde $P\,(3,1,2)$, es decir $\overline{\boldsymbol{OP}}=(3,1,2)$.

El vector normal al plano buscado es $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a} \times \overline{\boldsymbol{OP}}$, el cual es

$$\boldsymbol{n} = (-1,-1,2) \times (3,1,2) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-4,8,2)$$

es equivalente a $\boldsymbol{n} = (-2,4,1)$.

La ecuación del plano que contiene a la recta L_1 y pasa por el origen es

$$-2x + 4y + z = 0.$$

★

Ejemplo 114 *: Hallar la ecuación del plano que pasa por* $\left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{3}{2}\right)$ *y cuyo vector normal tiene longitud* 2 *y dos de sus ángulos directores son* $\alpha = \frac{\pi}{4}$ *y* $\beta = \frac{\pi}{3}$.

Solución : Es conocido que, todo vector se puede escribir como

$$\boldsymbol{a} = (|a|\cos\alpha, |a|\cos\beta, |a|\cos\gamma),$$

donde $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$ son los cosenos directores del vector $\boldsymbol{a}$ y $|a|$ es su longitud. Por otra parte

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\theta = 1.$$

Puesto que, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ y $\beta = \frac{\pi}{3}$, entonces

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\theta = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cos^2\theta = 1 \quad \Longrightarrow \quad \cos^2\theta = \frac{1}{4},$$

así, $\theta = \frac{\pi}{3}$, por lo tanto

$$n = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\sqrt{2}, 1, 1\right).$$

La ecuación del plano buscado es

$$\pi : \left(\sqrt{2}, 1, 1\right) \cdot \left(x - \frac{1}{2}, y - 1, z + \frac{3}{2}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{2}x + y + z = \frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

★

Ejercicios

1. Representar los siguientes puntos en el sistema coordenado $\mathbb{R}^3$ y graficar su vector posición asociado.

1. $P(2,0,2)$	2. $P(1,1,2)$	3. $P(-1,-1,1)$	4. $P(0,-2,1)$
5. $P(2,-1,-2)$	6. $P(3,3,1)$	7. $P(3,-1,0)$	8. $P(2,-1,-2)$

2. Determine las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto P dado y tiene al vector $\boldsymbol{v}$ como vector director

1. $P(0,0,0)$, $\boldsymbol{v} = (1,1,1)$	2. $P(0,1,0)$, $\boldsymbol{v} = (0,1,0)$	3. $P(2,-4,-7)$, $\boldsymbol{v} = (3,1,2)$

3. Determine las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P(2,1,6)$ y tiene como vector director $\boldsymbol{v} = (-2,1,2)$.

4. Determine las ecuaciones paramétricas y forma simétrica de la recta que pasa por los puntos $P(2,1,6)$ y $Q(-2,1,2)$.

5. Describa los vectores $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ que son ortogonales al vector $(3,-1)$. Verifique que éstos son los puntos de una recta que pasa por el origen y halle sus ecuaciones paramétricas.

6. Escribir la ecuación vectorial de la recta, en $\mathbb{R}^2$, definida por la ecuación cartesiana $2x + y = -3$.

7. Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P(2,1,1)$ y es paralela al vector que une P con el punto $Q(2,-3,-5)$.

8. Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P(x_0,y_0,z_0)$ y tiene al vector posición asociado a P por vector director.

9. Determine las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los dos puntos dados

   1. $P(3,9,7)$, $Q(-1,2,5)$ 2. $P(2,1,6)$, $Q(-2,3,2)$ 3. $P(0,0,0)$, $Q(2,6,5)$

10. Determine si el punto $Q\left(2, \frac{9}{2}, \frac{1}{2}\right)$ pertenece a la recta $L : \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 5 - t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$.

11. Determine si el punto $Q(-3,-1,3)$ pertenece a la recta $L : \begin{cases} x = t - 2 \\ y = 2 + 3t \\ z = -7 - 4t \end{cases}$.

12. Determinar si el punto P dado pertenece a la recta L dada.

    $a.$ $P(-5,7,9)$, $L : (x,y,z) = (4,-2,3) + s(-3,3,1)$.

    $b.$ $P\left(-1,7,\frac{3}{2}\right)$, $L : (x,y,z) = (-1,1,3) + t(0,4,-1)$.

13. Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P(1,4,1)$ y es paralela a la recta
$$L : (x,y,z) = (4,2,0) + t(3,0,-1).$$

14. Hallar la ecuación forma simétrica de la recta L_1 que contiene al punto $(-1,2,1)$ y es paralela a la recta
$$L_2 : \begin{cases} x = 3 + 2t, \\ y = -t, \\ z = 2 - 3t. \end{cases}$$

15. Hallar la ecuación forma simétrica de la recta L que pasa por el punto $(1,-2,4)$, es paralela a la recta
$$L_1 : \begin{cases} x = 2, \\ y = -3, \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$
y también paralela al eje z.

16. Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $(-4,7,3)$ y es perpendicular a las rectas
$$L_1: \frac{x-2}{-4} = \frac{y+3}{-7} = \frac{z+1}{3} \qquad \text{y} \qquad L_2: \frac{x+2}{3} = \frac{y-5}{4} = \frac{z+3}{-2}.$$

17. Los vectores $\boldsymbol{v_1} = (-1,-6,7)$ y $\boldsymbol{v_2} = (3,2,-4)$ son los vectores directores de las rectas L_1 y L_2 respectivamente. Encuentre un vector director para la recta L, si se sabe que ella es perpendicular, tanto a L_1 como a L_2.

18. Determine el ángulo entre las rectas $L_1: \begin{cases} x = 1 + x \\ y = 0 \\ z = -5 + 2z \end{cases}$ y $L_2: \dfrac{x-3}{2} = y - 4 = \dfrac{2-z}{2}$.

19. Determine el ángulo entre las rectas $L_1: 2 - x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{1-z}{3}$ y $L_2: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{1-y}{4} = \dfrac{z+3}{6}$.

20. Hallar el ángulo formado por las rectas
$$L_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{6} = \frac{z-5}{2} \qquad \text{y} \qquad L_2: \frac{x}{2} = \frac{y-3}{9} = \frac{z+1}{6}.$$

21. La recta L_1 pasa por los puntos $A(-6,-1,3)$, $B(-3,2,7)$ y la recta L_2 pasa por los puntos $C(4,2,1)$, $D(2,3,-5)$. Encuentre la medida del ángulo agudo formado por L_1 y L_2.

22. Hallar, si existe, el punto de intersección entre las rectas
$$L_1: x + 3 = \frac{1-y}{2} = -\frac{z}{3} \qquad \text{y} \qquad L_2: \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{4}.$$

23. Encuentre las coordenadas del punto de intersección de la recta L_1 que pasa por los puntos $A(3,-5,2)$ y $B(11,-3,6)$ con la recta L_2 que pasa por los puntos $C(5,-3,2)$ y $D(9,-5,6)$.

24. Sean L_1 la recta que contiene al punto $A(1,2,3)$ y es paralela a la recta que pasa por $B(-2,2,0)$ y $C(4,-1,7)$ y L_2 la recta que pasa por $E(1,-1,8)$ y $F(10,-1,11)$. Demuestre que L_1 y L_2 se cortan y encuentre las coordenadas del punto de intersección.

25. Demuestre que las rectas
$$L_1: x - 2 = y - 1 = -\frac{z}{2} \qquad \text{y} \qquad L_2: \frac{x-2}{3} = -\frac{y}{2} = \frac{z-2}{2}.$$
no son paralelas y no tienen puntos en común.

26. Hallar, si existe, el punto de intersección entre las rectas
$$L_1: x - 2 = y - 1 = \frac{3-z}{2} \qquad \text{y} \qquad L_2: x + 1 = \frac{y-4}{2} = \frac{1-z}{3}.$$

27. Demuestre que las rectas
$$L_1: x - 2 = y - 1 = \frac{3-z}{2} \qquad \text{y} \qquad L_2: x + 1 = \frac{y-4}{2} = \frac{1-z}{3}.$$
se cruzan.

28. Hallar las ecuaciones paramétricas y forma simétricas de la recta que pasa por el punto $P(-2,1,2)$ y es paralela a la recta $L: \dfrac{1-x}{3} = \dfrac{y+2}{2}$, $z = 3$.

29. Hallar las ecuaciones paramétricas y forma simétricas de la recta que pasa por el punto $P(0,-3,5)$ y es perpendicular a las rectas

$$L_1 : \begin{cases} x = -2 - 3t \\ y = 5t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \qquad \text{y} \qquad L_2 : 3 - x = \frac{y-3}{2} = \frac{4-z}{2}.$$

30. Demostrar que la distancia entre la recta $L : \boldsymbol{x} = \overline{OP_1} + \boldsymbol{v}t$ y el punto P, que no pertenece a la recta, viene dada por

$$d(P,L) = \frac{\left|\overline{P_1P} \times \boldsymbol{v}\right|}{|\boldsymbol{v}|}.$$

31. Hallar la distancia entre la recta $L : \dfrac{x-3}{3} = y+2,\ z = 4$ y el punto $P(-2,1,1)$.

32. Hallar la distancia entre la recta $L : \dfrac{x+2}{5} = \dfrac{y+2}{7} = 4 - z,$ y el punto $P(8,12,2)$.

33. Demostrar que la distancia entre las rectas, que se cruzan,

$$L_1 : \boldsymbol{x} = \overline{OP_1} + \boldsymbol{v_1}t \qquad \text{y} \qquad L_2 : \boldsymbol{x} = \overline{OP_2} + \boldsymbol{v_2}t,$$

la cual denotamos por $d(L_1, L_2)$, viene dada por

$$d(L_1, L_2) = \frac{\left|\overline{P_1P_2} \cdot (\boldsymbol{v_1} \times \boldsymbol{v_2})\right|}{|\boldsymbol{v_1} \times \boldsymbol{v_2}|}.$$

34. Una recta L_1 pasa por los puntos $A(2,2,-1)$ y $B(5,-1,3)$ y otra L_2 pasa por el punto $C(-4,2,-6)$ y $P(x,y,z)$ cuya coordenada x es 2. Encuentre las otras coordenadas de P si L_1 es paralela a L_2.

35. Sea $\boldsymbol{u} = (3,-1,2)$ y la recta $L : x = \dfrac{y}{2} = -z$. Calcular el módulo de la proyección de $\boldsymbol{u}$ en la dirección de la recta.

36. Escriba las ecuaciones de los planos coordenados de $\mathbb{R}^3$.

37. Hallar las coordenadas del punto $P(x,y,z)$ donde la recta, que pasa por los puntos $A(3,-2,7)$ y $B(13,3,-8)$, intersecta al plano xz.

38. Determine la ecuación del plano que pasa por el punto P y tiene al vector $\boldsymbol{n}$ como vector normal

    1. $P(0,0,0)$, $\boldsymbol{n} = (1,1,1)$
    2. $P(2,1,1)$, $\boldsymbol{n} = (1,0,0)$
    3. $P(3,4,5)$, $\boldsymbol{n} = (0,2,3)$
    4. $P(2,-1,0)$, $\boldsymbol{n} = (3,2,6)$
    5. $P(0,2,0)$, $\boldsymbol{n} = (-2,-7,4)$

39. Hallar la ecuación del plano que pasa por $P(x_0,y_0,z_0)$ y tiene al vector posición asociado a P con vector normal.

40. Considere los puntos $P(1,-1,3)$, $Q(3,2,1)$. Hallar la ecuación del plano

    (a) que pasa por P y tiene a $\boldsymbol{n} = P - Q$ por vector normal.
    (b) que pasa por Q y tiene a $\boldsymbol{n} = Q - P$ por vector normal.

41. Determine si los puntos P y Q pertenecen al plano dado

    1. $3x - y + z = 1$, $P(0,0,1)$, $Q(1,1,-1)$
    2. $z = 3$, $P(3,1,3)$, $Q(3,3,5)$
    3. $x + y - 4z = 0$, $P(0,0,0)$, $Q(2,2,1)$
    4. $3x - 2y = 0$, $P(2,1,1)$, $Q(-3,2,5)$
    5. $x + y - 2z = 10$, $P(5,7,2)$, $Q(5,7,1)$

42. Determine un punto por el que pasa el plano dado y un vector normal a él

1. $3x + z = 3$ 2. $y = 0$ 3. $x - y - z = 5$ 4. $3x - 2y + 7z = 23$

43. Determine si los planos dados son paralelos, perpendiculares, o si no están en ninguno de estos dos casos.

1. $3x + y - z = 3$; $z - y = 8$ 2. $x + 4y - 2z = 1$; $2x + 8y - 4z = 7$
3. $x - y + z = 1$; $x - y + z = 9$ 4. $x = 0$; $z = 0$ 5. $y = 3$; $y = 7$

44. Determine la ecuación del plano que pasa por los tres puntos dados

1. $P(0,0,0)$, $Q(3,1,1)$, $R(-1,2,4)$ 2. $P(2,1,0)$, $Q(0,0,7)$, $R(2,1,1)$
3. $P(1,-1,-1)$, $Q(8,4,2)$, $R(2,1,5)$ 4. $P(1,4,9)$, $Q(-3,1,5)$, $R(4,4,11)$
5. $P(a,0,0)$, $Q(0,b,0)$, $R(0,0,c)$

45. Demuestre que la ecuación de un plano que pasa por el punto $P(x_0,y_0,z_0)$, tal que, los vectores no colineales $\boldsymbol{u} = (a_1,b_1,c_1)$, $\boldsymbol{v} = (a_2,b_2,c_2)$ son paralelos a él, se puede escribir como

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

46. Demuestre que la ecuación de un plano que pasa por los puntos $P(x_0,y_0,z_0)$, y $Q(x_1,y_1,z_1)$ tal que, el vector $\boldsymbol{u} = (a,b,c)$ es un vector paralelo a él, se puede escribir como

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0.$$

47. Escribir las ecuaciones de los planos que contienen el punto $(2,1,1)$, son perpendiculares al plano xz y forman un ángulo igual a $\arccos\left(\dfrac{2}{3}\right)$ con el plano $2x - y + 2z - 3 = 0$.

48. Sean los planos

$$\pi_1 : x + z = 0 \qquad \text{y} \qquad \pi_2 : 2x - 4y + 4z = 3$$

y las rectas

$$L_1 : -x - 7 = 1 - y = z \qquad \text{y} \qquad L_2 : \begin{cases} x + 8 + t = 0 \\ y + 2 = t \\ z + t = 3 \end{cases}$$

(a) Hallar la ecuación de la recta L que es paralela a los planos dados y que pasa por el punto de intersección de las rectas.
(b) Calcular la distancia de L_2 al origen.
(c) Encontrar el ángulo formado por los planos.

49. Escribir las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $P_1(1,-1,1)$, es ortogonal a la recta $3x = 2y = z$ y es paralela al plano $\pi : x + y - z = 0$.

50. Sean las rectas $L_1 : 3 - x = \dfrac{4-y}{3} = \dfrac{z+1}{4}$ y $L_2 : \dfrac{x+2}{4} = y = \dfrac{2z-1}{5}$ y los planos $\pi_1 : x + 2y - z = 4$ y $\pi_2 : 3x + 8y + z = 0$. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto de intersección de las rectas dadas y es perpendicular a la recta intersección de los planos.

51. El punto $P(1,2,3)$ se encuentra en el plano $x+y-z=0$. Determine la forma general de las ecuaciones de las rectas que pasan por P y que se encuentran sobre el plano dado.

52. Determinar si $L_1 : (x,y,z) = t(2,-3,4)$, $L_2 : \begin{cases} x = 7s \\ y = -2s \\ z = 3s \end{cases}$ y $L_3 : \dfrac{x}{9} = \dfrac{-y}{5} = \dfrac{z}{7}$ pertenecen a un mismo plano. Si es así, hallar la ecuación del plano.

53. Conseguir la solución del sistema $\begin{cases} 2x+3y+z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ más cercana a $P(1,1,1)$.

54. Sean la recta $L_1 : \dfrac{9-3x}{6} = \dfrac{1-y}{2} = \dfrac{z-2}{4}$ y el plano $\pi_1 : 3x-2y+6z=-5$

   (a) Hallar la ecuación de la recta L_2 perpendicular al plano π_1 y que pasa por el origen.

   (b) Hallar la ecuación del plano π_2 que contiene a la recta L_1 y que pasa por el origen.

55. Hallar la distancia de la recta $L : \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+2t \\ z = 3+t \end{cases}$ al plano $x-y+z=1$.

56. Hallar el punto de intersección de la recta L que pasa por el punto $P(1,-3,4)$ y es perpendicular al plano $x-2y-z=9$ con dicho plano.

57. Hallar los valores de α tales que los vectores $\boldsymbol{u} = (\alpha, 0, -1)$, $\boldsymbol{v} = (0, 2-\alpha, 1)$ y $\boldsymbol{w} = (1,1,0)$ sean coplanares y buscar la ecuación del plano que los contiene.

58. Sean los planos $\pi_1 : x-y+z=1$ y $\pi_2 : 2x+3z=0$

   (a) Hallar la ecuación de la recta L paralela a dichos planos y que pasa por el punto $P(1,-1,1)$.

   (b) Hallar la ecuación del plano π perpendicular a los planos dados y que pasa por el punto $Q(1,1,0)$.

   (c) Encontrar el punto de intersección de L con π.

59. Sean el plano $\pi : -x+9y+6z=23$ y l recta $L : \dfrac{x+2}{3} = 3-y = \dfrac{z+1}{2}$.

   (a) Hallar la intersección P de la recta con el plano.

   (b) Encontrar el punto de corte Q del plano con el eje x.

   (c) Hallar la ecuación de la recta que pasa por Q y uno de los puntos de P.

   (d) Encontrar la ecuación del plano perpendicular a π y que contiene a L.

60. Sean los planos

$$\pi_1 : x-y+2z=0 \qquad \text{y} \qquad \pi_2 : 3x+y+z=1$$

   y las rectas

$$L_1 : \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1-4t \\ z = 5-t \end{cases} \qquad \text{y} \qquad L_2 : \begin{cases} x = 4-s \\ y = -1+6s \\ z = 4+s \end{cases}$$

   (a) Hallar la ecuación de la recta que es paralela a dichos planos y que pasa por el punto P de intersección de las rectas dadas.

   (b) Hallar la ecuación del plano que es perpendicular a los planos dados y que pasa por P.

61. Sean las rectas $L_1 : \dfrac{2-2x}{2} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{3-z}{-1}$ y $L_2 : \begin{cases} x = 2+t \\ y = -1-3t \\ z = -4 \end{cases}$

   (a) Hallar, si es posible, la ecuación del plano que contiene a dichas rectas.
   (b) Hallar el punto en el cual la primera recta corta al plano xy.
   (c) Hallar para cuales valores de k, el plano $kx - 2y + 3z = 4$ es paralelo a la segunda recta.
   (d) Encontrar la intersección de L_2 con el plano $y - x - z = 2$.

62. (a) Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta de ecuaciones $\begin{cases} x = 3t+1 \\ y = -2t+4 \\ z = t-3 \end{cases}$ y al punto $P(5,0,2)$.
   (b) Hallar la distancia de ese plano al origen.

63. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P(5,1,1)$, si se sabe que los vectores $\boldsymbol{u} = (2,1,2)$, $\boldsymbol{v} = (-4,-5,7)$ son paralelos a él.

64. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $P(1,1,0)$, $Q(3,2,4)$ si se sabe que el vector $\boldsymbol{u} = (7,-1,-3)$ es paralelo a él.

65. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P(3,2,2)$ y es paralelo al plano $3x - 2y + z = 6$.

66. Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano $\pi : 4x - y + z = 9$.

67. Calcule la distancia del punto P al plano dado

   1. $P(5,30,426)$, $x = 3$ 2. $P(3,-2,5)$, $2x - y + z = 0$ 3. $P(1,1,5)$, $2x + 3y - 2z = 4$

68. Verifique que los planos $\pi_1 : 2x + y - z = 4$, $\pi_2 : 4x + 2y - 2z - 5 = 0$ son paralelos. Halle la distancia entre ellos.

69. Suponga que los planos $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z = D_1$, $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z = D_2$ son paralelos. Obtenga una fórmula para calcular la distancia entre ellos.

70. Dos caras de un cubo se encuentran en los planos $\pi_1 : 3x - y + 2z = 5$, $\pi_2 : 3x - y + 2z = 7$. Calcule el volumen del cubo.

71. Los vectores $\boldsymbol{u} = (1,2,1)$, $\boldsymbol{v} = (-3,1,1)$, $\boldsymbol{w} = (1,-4,7)$ determinan 3 de las aristas de un paralelepípedo. Halle las ecuaciones de los planos en donde se encuentran sus caras.

72. Hallar un punto en el eje x que equidiste de los dos planos paralelos $\pi_1 : 3x - y + 2z = 6$, $\pi_2 : 3x - y + 2z = 13$.

73. Hallar un punto en el eje y que equidiste de los dos planos $\pi_1 : 2x + 2y + z = 0$, $\pi_2 : 4x - 3y = 2$.

74. Demuestre que los tres planos $\pi_1 : x + y + z = 6$, $\pi_2 : x - y - z = 0$, $\pi_3 : 2x - 3y + z = 1$ se cortan en un solo punto. Determine ese punto.

75. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(3,4,7)$ y es perpendicular al plano

$$\pi : 3x - 2y + z = 9.$$

76. El punto $P(2,1,-1)$ se encuentra en el plano $\pi : x - y + z = 0$. Determine la forma general de las ecuaciones de las rectas que pasan por P y que se encuentran sobre el plano dado.

77. Hallar la distancia entre los puntos de intersección de la recta $x = 5 + t$, $y = 3 - 2t$, $z = 4 + 3t$, con los planos paralelos $\pi_1 : 2x + y + z = 3$, $\pi_2 : 2x + y + z = 9$. ¿Es ésta la distancia entre los dos planos paralelos dados?

78. Demostrar que no existen puntos (x, y, z) que satisfagan $2x - 3y + z - 2 = 0$ y que están sobre la recta $\boldsymbol{v} = (2, -2, -1) + t\,(1, 1, 1)$

79. Demostrar que todo punto sobre la recta $\boldsymbol{v} = (1, -1, 2) + t\,(2, 3, 1)$ satisface $5x - 3y - z - 6 = 0$.

80. Determine la componente z del vector $\boldsymbol{v} = (2, 4, z)$, si se sabe que forma un ángulo de magnitud 60° con el vector $\boldsymbol{w} = (1, 2, 0)$.

81. Encuentre la medida de los ángulos internos del triángulo cuyos vértices son los puntos $A\,(4, 1, 0)$, $B\,(2, -1, 3)$ y $C\,(1, -3, 2)$.

82. Dadas las rectas $L_1 : 1 - x = \dfrac{y + \alpha}{\alpha - 1} = z$ y $L_2 : \begin{cases} 2\alpha x + y + z = 1 \\ x + y + z + 2 = 0 \end{cases}$. Determine

   (a) El valor de α para el cual L_1 y L_2 son ortogonales.

   (b) Para $\alpha = 2$, la recta proyección ortogonal de L_1 sobre el plano de ecuación $\pi_1 : x + y + z + 2 = 0$.

   (c) Para $\alpha = 2$, un plano que sea paralelo a L_1 y L_2 y forme con los planos coordenados un tetraedro de volumen 36.

   (d) Para $\alpha = 2$, la distancia entre las rectas L_1 y L_2.

83. Hallar la ecuación del plano que pasa por $\left(\dfrac{1}{2}, 1, -\dfrac{3}{2}\right)$ y cuyo vector normal tiene longitud 2 y dos de sus ángulos directores son $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ y $\beta = \dfrac{\pi}{3}$.

84. Determinar la ecuación del plano que está a una distancia de 2 unidades del origen y contiene a la recta determinada por los planos $3x - y + 4z = 8$, y $4x + y + 2z = 2$.

85. Hallar el lugar geométrico de los puntos que distan del plano $3x - 2y - 6z = 12$ el doble que del plano $x - 2y + 2z + 4 = 0$.

86. Determinar si las siguientes proposiciones son **VERDADERAS** ó **FALSAS**.

   (a) Si $\boldsymbol{u}$ es un vector de $\mathbb{R}^3$ múltiplo escalar positivo de $\boldsymbol{v}$, entonces se tiene que
   $$|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{u}| + |\boldsymbol{v}|\,.$$

   (b) Si $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ son vectores no nulos de $\mathbb{R}^2$, entonces se cumple que
   $$\text{proy}_{\boldsymbol{w}}\,(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \text{proy}_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{u} + \text{proy}_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}.$$

   (c) Si $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ son $n-$vectores, tales que $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$, entonces $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$.

   (d) Sean $\boldsymbol{u} = (a, b)$ y $\boldsymbol{v} = (c, d)$ no nulos. Entonces, si $ac + bd < 0$, los vectores $\boldsymbol{v}$ y $\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ tiene la misma dirección.

   (e) Si el ángulo formado por $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ es $\dfrac{\pi}{2}$, entonces $|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}|^2 = |\boldsymbol{u}|^2 + |\boldsymbol{v}|^2$.

   (f) Dos de los ángulos directores de cierto vector de $\mathbb{R}^3$ son iguales a $\dfrac{\pi}{4}$, entonces, el tercer ángulo también es $\dfrac{\pi}{4}$.

   (g) La recta $(x, y, z) = t\,(1, 1, 2)$ es paralela al plano $2x + 4y + 6z = 0$.

   (h) La distancia del punto $P\,(1, 1, 2)$ al plano $x - y + z = 2$ es 2.

   (i) Si $\boldsymbol{u}$ es un vector de $\mathbb{R}^2$ múltiplo escalar de $\boldsymbol{v}$, entonces se tiene que $|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{u}| + |\boldsymbol{v}|$.

   (j) Si $\boldsymbol{u}$ es un vector de $\mathbb{R}^2$ múltiplo escalar de $\boldsymbol{v}$, entonces se tiene que $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$.

(k) No existe α, tal que $\boldsymbol{u} = (-2, 5)$ y $\boldsymbol{v} = (\alpha, -2)$ sean ortogonales.

(l) Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{v} = -x\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{w} = A\boldsymbol{v}$. Entonces, el ángulo formado por $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ es independiente de x.

(m) Si un vector director de una recta es perpendicular a un vector normal a un plano, entonces la recta y el plano son perpendiculares.

87. Seleccionar la letra correspondiente a la única alternativa correcta. Justificar todas sus respuestas.

1 Sean $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ de $\mathbb{R}^2$ y ϕ el ángulo formado por ellos. Entonces

a Si $\phi = \dfrac{\pi}{2}$, entonces $\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$.

b $\boldsymbol{v}$ y $\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ tienen la misma dirección si $0 < \phi < \dfrac{\pi}{2}$.

c Si $\phi = \pi$, entonces $\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}$.

d $\boldsymbol{v}$ y $\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ tienen direcciones opuestas si $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0$.

2 Se dan las siguientes proposiciones:

i. Los cosenos directores de un vector de $\mathbb{R}^3$ pueden ser $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\dfrac{1}{2}$, y $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

ii. Para todo escalar α y para todo $\boldsymbol{v}$ del plano se cumple que $|\alpha\boldsymbol{v}| = \alpha\,|\boldsymbol{v}|$.

iii. $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ del espacio son paralelos si y solo si $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$.

Entonces, son ciertas

a) Sólo iii *b*) i y iii *c*) Sólo ii *d*) i y ii

3 El ángulo entre $\boldsymbol{u} = (1, 1)$ y $\boldsymbol{v} = \left(1, \sqrt{3}\right)$ es

a. 105° *b.* 15° *c.* 45° *d.* 60°

4 Si L es una recta paralela a un plano π del espacio con $\boldsymbol{v}$ un vector director de L y $\boldsymbol{n}$ un vector normal a π entonces:

a La distancia entre L y π tiene que ser cero.

b La distancia entre L y π tiene que ser distinto de cero.

c $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{n}$ son paralelos.

d $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{n}$ son perpendiculares.

5 La ecuación de la recta que pasa por $P(0, 2, 1)$ y es perpendicular al plano $x - y + z = 0$ es

a. $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$ *b.* $x = 2 - y = z - 1$ *c.* $x = y - 2 = z - 1$ *d.* $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$

6 Sean $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ vectores del plano xy. Entonces

a. $\boldsymbol{v}$ y $\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ son perpendiculares y $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} > 0$ si $0 < \phi < \dfrac{\pi}{2}$.

b. $\boldsymbol{v}$ y $\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ son paralelos y $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} > 0$ si $\dfrac{\pi}{2} < \phi < \pi$.

c. $\boldsymbol{v}$ y $\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ son perpendiculares y $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} < 0$ si $\dfrac{\pi}{2} < \phi < \pi$.

d. $\boldsymbol{v}$ y $\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ son paralelos y $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} > 0$ si $0 < \phi < \dfrac{\pi}{2}$.

7 La ecuación del plano que pasa por $P(1,0,3)$ y es perpendicular a la recta $\dfrac{x+5}{3} = y+2 = \dfrac{z+4}{2}$ es

a. $3x+y+2z=9$ *b.* $x+3z=9$ *c.* $3x+y+2z=14$ *d.* $x+3z=10$

8 Sean $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ vectores del plano xy. Entonces

a. $\boldsymbol{v}$ y $\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ tienen la misma dirección si $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}<0$.
b. $\boldsymbol{v}$ y $\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ tienen direcciones opuestas si $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}>0$.
c. $\boldsymbol{v}$ y $\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ tienen la misma dirección si $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}>0$.
d. $\boldsymbol{v}$ y $\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ tienen direcciones opuestas si $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=0$.

9 Sean $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ vectores del plano xy y ϕ el ángulo entre ellos. Entonces

a. Si $\phi=135°$, entonces $\boldsymbol{v}$ y $\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ tienen la misma dirección.
b. Si $\phi=45°$, entonces $\text{comp}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}<0$.
c. Si $\phi=60°$, entonces $|\text{proy}_{\boldsymbol{v}}| = -\text{comp}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$
d. Si $\phi=150°$, entonces $\boldsymbol{v}$ y $\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ tienen direcciones opuestas.

10 Se dan los puntos P y Q y el vector PQ. La alternativa correcta es:

a. $P(1,1,-1)$, $Q(0,2,3)$ y $PQ=(1,1,4)$ *b.* $P(1,1,-1)$, $Q(0,2,3)$ y $PQ=(-1,1,4)$

c. $P(1,-1,1)$, $Q(0,2,3)$ y $PQ=(-1,1,2)$ *d.* $P(1,-1,1)$, $Q(1,2,3)$ y $PQ=(0,3,4)$

11 Sean $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ vectores y ϕ es el ángulo que ellos forman. Entonces

a. $\boldsymbol{u}-\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ es perpendicular a $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}>0$, si $\phi=\dfrac{2\pi}{3}$.
b. $\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ es paralela a $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{u}-\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ es paralelo a $\boldsymbol{u}$.
c. $\boldsymbol{u}-\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ es perpendicular a $\boldsymbol{v}$ y $\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ es perpendicular a $\boldsymbol{u}$.
d. $\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ es paralelo a $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}<0$ si $\phi=150°$.

12 Las ecuaciones de la recta que pasa por $P(1,2,3)$ y es paralela al vector $\boldsymbol{v}=(4,5,6)$ son:

a. $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-2}{5}=\dfrac{z-3}{6}$ *b.* $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y+2}{5}=\dfrac{z+3}{6}$

c. $\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z+6}{3}$ *d.* $\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z+6}{3}$

88. Colocar en la columna de la izquierda la única letra correspondiente de la columna de la derecha. Justificar todas sus respuestas.

( ) $\boldsymbol{u}=\alpha\boldsymbol{v}$ con $\alpha>0$	*a)* $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}<0$
( ) El ángulo entre $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ es $60°$	*b)* $\lvert\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\rvert=\lvert\boldsymbol{u}\rvert+\lvert\boldsymbol{v}\rvert$
( ) $\lvert\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\rvert^2$ es igual a	*c)* $\lvert\boldsymbol{u}\rvert^2\lvert\boldsymbol{v}\rvert^2-(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})^2$
( ) $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ son coplanares	*d)* $\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=0$
	e) $\lvert\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\rvert>\lvert\boldsymbol{u}\rvert+\lvert\boldsymbol{v}\rvert$
	f) $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}>0$
	g) $\lvert\boldsymbol{u}\rvert^2\lvert\boldsymbol{v}\rvert^2+(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})^2$
	h) $\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})=0$

Bibliografía

1. **Grossman, Staley I.**: "*Álgebra lineal*". Quinta edición. Mc Graw Hill.

2. **Kolman, B. y Hill, D. R.**: "*Álgebra lineal*". Octava edición. PEARSON Prentice Hall.
3. **Rangel, J., y otros**: "*Problemario de álgebra lineal*". Universidad Metropolitana. 1997.
4. **Anton, H. - Rorres, C.**: "*Elementary linear algebra. Applications version*". Six Edition. WILEY.

Este material ha sido revisado recientemente, pero esto no garantiza que esté libre de errores, por esa razón se agradece reportar cualquier error que usted encuentre en este material enviando un mensaje al correo electrónico

farith.math@gmail.com

indicando donde se encuentra(n) dicho(s) error(es). **MUCHAS GRACIAS**.

Espacios vectoriales.

Objetivos a cubrir

Código : MAT-3.06

- Espacios vectoriales complejos y reales. Definición.
- Subespacios de un espacio vectorial.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 115 *: Sea el espacio vectorial* $V = \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x > 0\}$ *con las operaciones:*

- *Suma : Si* $a, b \in V$, *entonces* $a + b$, *es la suma usual entre números reales.*
- *Multiplicación por un escalar : Si* $a \in V$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$, *entonces* $\alpha a = a^\alpha$.

¿Es $(V, +, \cdot, \mathbb{R})$ *un espacio vectorial?*

Solución : El elemento neutro para la suma usual es el cero, pero cero no pertenece a V, por lo tanto $(V, +, \cdot, \mathbb{R})$ no es un espacio vectorial. ★

Ejemplo 116 *: Sea* V *el espacio vectorial real de todas las funciones* f *de* $\mathbb{R}$ *en* $\mathbb{R}$, *con las operaciones usuales de suma y multiplicación por un escalar real definidas en las funciones reales. Sea*

$$W = \left\{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f\left(x^2\right) = f^2(x) \right\}$$

¿Es W *un subespacio vectorial de* V*?.*

Solución : No, ya que no es cerrado bajo la suma: Sean $f, g \in W$, entonces

$$(f+g)\left(x^2\right) = f\left(x^2\right) + g\left(x^2\right) = f^2(x) + g^2(x) = \left(f^2 + g^2\right)(x) \neq (f+g)^2(x).$$

★

Ejemplo 117 *: Sean*

$$H = \left\{ A \in M_{2\times 2} \ / \ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Demostrar que H *es un subespacio de* $M_{2\times 2}$, *con las operaciones de suma y multiplicación ordinarias definidas en el conjunto* $M_{2\times 2}$.

Demostración : Se debe demostrar que H es diferente de vacío, es cerrado bajo la suma y cerrado bajo la multiplicación por un escalar dado en $M_{2\times 2}$. Observemos que el vector

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in H,$$

ya que, el elemento a_{44} es igual a cero.

Demostremos que H es cerrado bajo la suma ordinaria definida en $M_{2\times 2}$. Sean $A, B \in H$, vectores genérico,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & 0 \end{pmatrix},$$

entonces

$$A + B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & 0 \end{pmatrix} \in H.$$

Por lo tanto, H es cerrado bajo la suma.

Demostremos que H es cerrado bajo la multiplicación por un escalar ordinaria definida en $M_{2\times 2}$, sea k un escalar, entonces

$$kA = k\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 & kb_1 \\ kc_1 & 0 \end{pmatrix} \in H.$$

Por lo tanto, H es cerrado bajo la multiplicación por un escalar, luego, H es un subespacio del espacio vectorial $M_{2\times 2}$. ★

Ejercicios

1. Sea $V = \mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \ / \ x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$. Definimos las **operaciones ordinarias** sobre elementos de $\mathbb{R}^2$.

   - **Suma** $(+)$ **:** Si $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, entonces
   $$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}.$$

   - **Multiplicación por un escalar** $(\cdot)$ **:** Si $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ y k es un escalar que pertenece al cuerpo de escalares $F = \mathbb{R}$, entonces
   $$k\boldsymbol{x} = k\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx_1 \\ kx_2 \end{pmatrix}.$$

   Demuestre que $\left(\mathbb{R}^2, +, \cdot, \mathbb{R}\right)$, es un espacio vectorial.

2. Sea $V = \mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \ / \ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$. Definimos las **operaciones ordinarias** sobre elementos de $\mathbb{R}^3$.

   - **Suma** $(+)$ **:** Si $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, entonces
   $$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}.$$

   - **Multiplicación por un escalar** $(\cdot)$ **:** Si $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ y k es un escalar que pertenece al cuerpo de escalares $F = \mathbb{R}$, entonces
   $$k\boldsymbol{x} = k\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ kx_3 \end{pmatrix}.$$

Demuestre que $\left(\mathbb{R}^3,+,\cdot,\mathbb{R}\right)$, es un espacio vectorial.

3. Sea $V=\mathbb{R}^n=\left\{\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} \;/\; x_i\in\mathbb{R},\;\; i=1,2,\ldots,n\right\}$. Definimos las **operaciones ordinarias** sobre elementos de $\mathbb{R}^n$.

   - **Suma** $(+)$ **:** Si $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$, entonces

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1+y_1\\ x_2+y_2\\ \vdots\\ x_n+y_n\end{pmatrix}.$$

   - **Multiplicación por un escalar** $(\cdot)$ **:** Si $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ y k es un escalar que pertenece al cuerpo de escalares $F=\mathbb{R}$, entonces

$$k\boldsymbol{x}=k\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} kx_1\\ kx_2\\ \vdots\\ kx_n\end{pmatrix}.$$

   Demuestre que $(\mathbb{R}^n,+,\cdot,\mathbb{R})$, es un espacio vectorial.

4. Demuestre que el conjunto de los números reales positivos forma un espacio vectorial con las operaciones

$$x+y=xy \qquad\qquad \text{y} \qquad\qquad \alpha x=x^{\alpha},$$

   y el cuerpo de escalares $F=\mathbb{R}$.

5. Demuestre que el conjunto $C\,[a,b]$ de las funciones continuas en el intervalo cerrado $[a,b]$ con la suma definida por

$$(f+g)\,(x)=f\,(x)+g\,(x)\,, \qquad \text{para toda } \; x\in[a,b]\,,$$

   la multiplicación por un escalar definida por

$$(\alpha f)\,(x)=\alpha f\,(x)\,, \qquad \text{para toda } \; x\in[a,b]$$

   y el cuerpo de escalares $F=\mathbb{R}$, es un espacio vectorial.

6. Demuestre que el conjunto $M_{m\times n}$ con las operaciones ordinarias de suma, multiplicación por un escalar entre matrices y el cuerpo de escalares $F=\mathbb{R}$, es un espacio vectorial.

7. Demuestre que el conjunto de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual a n, denotado por P_n con las operaciones de suma y multiplicación por un escalar ordinarias entre polinomios y le cuerpo de escalares $F = \mathbb{R}$, es un espacio vectorial.

8. Determine si el conjunto dado es un espacio vectorial. Si no lo es, dé una lista de los axiomas que no se cumplen. En todos los casos considere como cuerpo de escalares a $F = \mathbb{R}$.

   (a) El conjunto que consiste del vector nulo bajo las operaciones ordinarias definidas sobre $\mathbb{R}^2$.

   (b) El conjunto de las funciones continuas definidas en el intervalo cerrado $[a, b]$ con $f(a) = f(b) = 0$, con la suma y la multiplicación por un escalar ordinarias entre funciones reales.

   (c) $V = \mathbb{R}^2$; $(x_1, y_1) + (x_2, y_2)$ la adición ordinaria, y $\alpha(x, y) = \left(\alpha^2 x, \alpha^2 y\right)$.

   (d) El conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$ de la forma (x, x, x), con las operaciones ordinarias entre vectores de $\mathbb{R}^3$.

   (e) $V = R^+$ $x + y$; adición usual, $\alpha x = x^\alpha$.

   (f) $\mathbb{R}^2$ con la suma definida por

   $$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 + 1, y_1 + y_2 + 1)$$

   y la multiplicación por un escalar ordinaria.

   (g) El conjunto del problema 8f con la multiplicación por un escalar definida por

   $$\alpha(x, y) = (\alpha + \alpha x - 1, \alpha + \alpha y - 1)$$

   (h) $V = \mathbb{R}$; $x + y = xy + 1$, αx multiplicación ordinaria.

   (i) $V = \{A \in M_{3\times 3} \ / \ A \text{ es invertible}\}$; Adición y multiplicación ordinaria para matrices.

   (j) El conjunto de las matrices diagonales de tamaño $n \times n$ con la adición y multiplicación por un escalar ordinario entre matrices.

   (k) El conjunto $C[a, b]$ de las funciones continuas definidas en el intervalo cerrado $[a, b]$ con la suma y la multiplicación por un escalar ordinarias entre funciones reales.

   (l) El conjunto de matrices 2×2 que tienen la forma

   $$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$$

   bajo la suma y multiplicación por un escalar usuales.

9. (a) Sea V un espacio vectorial. Demuestre que si $S \subset V$ es un subespacio vectorial de V, entonces $0 \in S$.

   (b) Demuestre que el conjunto

   $$A = \left\{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x_1 + x_2 = 1\right\}$$

   no es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

10. Demuestre que los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de los espacios vectoriales que se indican

   (a) $H = \left\{A \in M_{2\times 2} \ / \ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}\right\}$ es un subespacio de $M_{2\times 2}$.

   (b) Si $\boldsymbol{x}$ es un vector fijo de $\mathbb{R}^3$, entonces

   $$L = \{\lambda \boldsymbol{x} \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

   es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

   (c) $S = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x_1 + x_2 + x_3 = 0\right\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

(d) $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2} \ / \ a,b,c,d \in \mathbb{R},\ a = d = 0 \right\}$ es un subespacio de $M_{2\times 2}$.

(e) Si $a,b,c \in \mathbb{R}$, entonces

$$P = \left\{ \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ / \ ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \right\}$$

es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

11. Sea $H = \left\{ A \in M_{2\times 3} \ / \ A = \begin{pmatrix} -b & a & c \\ -a & b & d \end{pmatrix} \right\}$. Demostrar que H es un subespacio de $M_{2\times 3}$.

12. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ de $\mathbb{R}^n$ son subespacios de $\mathbb{R}^n$ $(n \leq 3)$

(a) todos los α, tal que $\alpha_1 \geq 0$.

(b) todos los α, tal que $\alpha_1 + 3\alpha_2 = \alpha_3$.

(c) todos los α, tal que $\alpha_2 = \alpha_1$.

(d) todos los α, tal que $\alpha_1 \alpha_2 = 0$.

(e) todos los α, tal que α_2 es racional.

13. Determine, en cada caso, si el conjunto H dado, del espacio vectorial V, es un subespacio de V.

(a) $V = \mathbb{R}^2$, $H = \{(x,y) \ / \ x = y\}$.

(b) $V = C[a,b]$; H el conjunto de funciones tales que $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = 1$

(c) $V = P_4$; H el conjunto de polinomios de grado 4.

(d) $V = \mathbb{R}^3$; H el conjunto de los planos que pasan por el origen.

14. Sea $V = \mathbb{R}^2$. Se define

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \qquad \text{y} \qquad \alpha(x_1, y_1) = (\alpha x_1, y_1).$$

¿Es V, con estas operaciones, un espacio vectorial?

15. Sea $V = \mathbb{R}^2$. Se define

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, 0) \qquad \text{y} \qquad \alpha(x_1, y_1) = (\alpha x_1, 0).$$

¿Es V, con estas operaciones, un espacio vectorial?

16. Sea $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2} \in M_{2\times 2} \ / \ a + 2d = 0, \quad \text{y} \quad b - 2c = 0 \right\}$. Demostrar que H es un subespacio de $M_{2\times 2}$.

17. Sea $H = \{A \in M_{3\times 3} \ / \ A \text{ es antisimétrica}\}$. Demostrar que H es un subespacio de $M_{3\times 3}$.

18. Sean los planos $\pi_1 : 2x - y - z = 3$ y $\pi_2 : x + 2y + 3z = 7$. Hallar la ecuación del plano π perpendicular a la recta L intersección de los planos dados de modo que sea un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

19. Sea V el espacio real de todas las funciones f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. ¿Cuál de los siguientes conjuntos de funciones son subespacios de V?

(a) todas las f, tales que $f(x^2) = f^2(x)$.

(b) todas las f, tales que $f(0) = f(1)$.

(c) todas las f, tales que $f(3) = 1 + f(-5)$.

(d) todas las f, tales que $f(-1) = 0$.

(e) todas las f que son continuas.

20. Sea V el espacio vectorial de todas las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, sea V_p el subconjunto de las funciones pares, $f(-x) = f(x)$, sea V_i el subconjunto de las funciones impares, $f(-x) = -f(x)$.

    (a) Demostrar que V_p y V_i son subespacios de V.

    (b) Demostrar que $V_p + V_i = V$.

    (c) Demostrar que $V_p \bigcap V_i = \{0\}$.

21. Demuestre que si W_1 y W_2 son dos subespacios de un espacio vectorial V. Entonces $W_1 \bigcap W_2$ es un subespacio vectorial de V.

22. Sean

$$W_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; 2x - y - z = 0\right\} \qquad \text{y} \qquad W_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x + 2y + 3z = 0\right\}.$$

Halle $W_1 \bigcap W_2$. ¿Es $W_1 \bigcap W_2$ un subespacio de $V = \mathbb{R}^3$?

23. Sean W_1 y W_2 dos subespacios de un espacio vectorial V. ¿Es $W_1 \bigcup W_2$ un subespacio vectorial de V?

24. Sean W_1 y W_2 subespacios de un espacio vectorial V, tal que la unión de W_1 y W_2 sea también un subespacio. Demostrar que uno de los espacios W_i, con $i = 1, 2$ está contenido en el otro.

25. Sean W_1 y W_2 subespacios de un espacio vectorial V, tales que $W_1 + W_2 = V$ y $W_1 \bigcap W_2 = \{0\}$. Demostrar que para todo vector $\boldsymbol{u}$ de V existen únicos vectores $\boldsymbol{u_1}$ en W_1 y $\boldsymbol{u_2}$ en W_2, tales que $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u_1} + \boldsymbol{u_2}$.

26. Determinar si las siguientes proposiciones son **VERDADERAS** o **FALSAS**. Justificar su respuesta.

    (a) $V = \mathbb{R}^2$, con las operaciones $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_2, y_2)$ y $\alpha(x, y)$ multiplicación por un escalar ordinaria, es un espacio vectorial.

    (b) $V = \mathbb{R}^2$, con las operaciones adición ordinaria y $\alpha(x, y) = \left(\alpha^2 x, \alpha^2 y\right)$ es un espacio vectorial.

    (c) $V = \mathbb{R}^2$, con las operaciones adición ordinaria y $\alpha(x, y) = (\alpha + x, \alpha + y)$ es un espacio vectorial.

    (d) $H = \{A \in M_{2\times 2} \;/\; |A| = 0\}$ es un subespacio de $M_{2\times 2}$, con las operaciones de adición y multiplicación por un escalar ordinarias.

    (e) $V = \mathbb{R}^+$, con las operaciones adición ordinaria y $\alpha x = x^\alpha$, con $\alpha x = x^\alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, es un espacio vectorial.

    (f) Si H y S son subespacios de V, entonces $H \bigcup S$ tanbién lo es.

    (g) El conjunto de soluciones de un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas no homogéneo es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

    (h) $S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x^2 \leq y\right\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

    (i) $H = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x^2 + y^2 \leq 4\right\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

27. Sean los planos $\pi_1 : 2x - y - z = 3$ y $\pi_2 : x + 2y + 3z = 7$. Hallar la ecuación del plano π que contiene a la recta L intersección de los planos dados de modo que π sea un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

28. Seleccionar la letra correspondiente a la **única** alternativa correcta. Justificar se respuesta.

    1 Sea $Q = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ una matriz ortogonal. Sean las siguientes proposiciones:

    $(i)\quad ad = bc \qquad\qquad (ii)\quad a^2 + b^2 = 1 \qquad\qquad (iii)\quad ac + db = 0$

    Entonces, son ciertas

    (a) Sólo i $\qquad$ (b) Sólo ii $\qquad$ (c) i y ii $\qquad$ (d) ii y iii

2 Sea $V = \{A \in M_{3\times 3} \;/\; A \text{ es invertible}\}$ con la adición y el producto por un escalar ordinario sobre matrices. Entonces, uno de los siguientes axiomas no se cumple

a. Cerradura de la suma.
b. Cerradura del producto por un escalar.
c. Elemento neutro para la suma.
d. Propiedad asociativa de la suma.

3 Sea $V = \mathbb{R}^2$ con $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1, y_1)$ y la multiplicación por un escalar ordinaria. Entonces, de los axiomas que definen un espacio vectorial, el que no se cumple de los dados a continuación es:

a. Asociatividad del producto por escalares.
b. Conmutatividad de la suma.
c. Cerradura de la suma.
d. Cerradura del productos por escalares.

4 Se dan los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$

$$A = \{(x, y, z) \;/\; x = 2 + t,\; y = -4 - 2t,\; z = 6 + 3t\}$$

$$B = \{(x, y, z) \;/\; x + 7 + 2(y - 2) + 3(z - 1) = 0\}$$

$$C = \{(x, y, z) \;/\; (x, y, z) \text{ pertenece al primer octante}\}.$$

Entonces, son espacios vectoriales

(a) Sólo B (b) A y C (c) A y B (d) Sólo C

5 El siguiente conjunto es un subespacio de $\mathbb{R}^3$

(a) $\{(x, y, z) \;/\; 2x + 3y + z = 5\}$ (b) $\{(x, y, z) \;/\; 3x + y + z = 0\}$

(c) $\{(x, y, z) \;/\; x = 2t + 5,\; y = 3t,\; z = 5t + 1\}$ (d) $\left\{(x, y, z) \;/\; \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z-9}{8}\right\}$

29. Sea A una matriz de tamaño $m \times n$. Considere el conjunto

$$H = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \;/\; A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}.$$

Demuestre que H es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

30. Sea A una matriz de tamaño $m \times n$. Considere el conjunto

$$H = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \;/\; A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}.$$

Demuestre que H **no** es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

31. Sea A una matriz de tamaño $m \times n$. Considere el conjunto

$$H = \{\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m \;/\; A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ para algún } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\}.$$

Demuestre que H es un subespacio de $\mathbb{R}^m$.

Bibliografía

1. **Grossman, Staley I.**: "*Álgebra lineal*". Quinta edición. Mc Graw Hill.

2. **Kolman, B. y Hill, D. R.**: "*Álgebra lineal*". Octava edición. PEARSON Prentice Hall.

3. **Rangel, J., y otros**: "*Problemario de álgebra lineal*". Universidad Metropolitana. 1997.

4. **Anton, H. - Rorres, C.**: "*Elementary linear algebra. Applications version*". Six Edition. WILEY.

Este material ha sido revisado recientemente, pero esto no garantiza que esté libre de errores, por esa razón se agradece reportar cualquier error que usted encuentre en este material enviando un mensaje al correo electrónico

farith.math@gmail.com

indicando donde se encuentra(n) dicho(s) error(es). **MUCHAS GRACIAS**.

Combinación lineal. Espacio generado.

Objetivos a cubrir

Código : MAT-3.07

- Combinación lineal de vectores. Conjunto generador.
- Espacio generado por vectores.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 118 *: Considere los vectores* $\boldsymbol{a} = (1, 2)$, $\boldsymbol{b} = (3, 5)$ *y* $\boldsymbol{c} = (1, 0)$. *Exprese al vector* $\boldsymbol{c}$ *como una combinación lineal de los otros vectores.*

Solución : Tenemos

$$\alpha\,(1, 2) + \beta\,(3, 5) = (1, 0) \qquad \Longrightarrow \qquad (\alpha + 3\beta, 2\alpha + 5\beta) = (1, 0)\,,$$

de aquí,

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = 1 \\ 2\alpha + 5\beta = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{array}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = -5, \quad \beta = 2,$$

por lo tanto,

$$(1, 0) = -5\,(1, 2) + 2\,(3, 5)$$

★

Ejemplo 119 *: Si* $\mathbb{C}$ *es el espacio vectorial de los números complejos. ¿Qué vectores de* $\mathbb{C}^3$ *son combinaciones lineales de* $(1, 0, -1)$, $(0, 1, 1)$ *y* $(1, 1, 1)$*?.*

Solución : Sea $\boldsymbol{u} = (a_1 + ib_1, a_2 + ib_2, a_3 + ib_3) \in \mathbb{C}^3$, entonces

$$(a_1 + ib_1, a_2 + ib_2, a_3 + ib_3) = \alpha_1\,(1, 0, -1) + \alpha_2\,(0, 1, 1) + \alpha_3\,(1, 1, 1)\,,$$

esto implica

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = a_1 + ib_1 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = a_2 + ib_2 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = a_3 + ib_3 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a_1 + ib_1 \\ 0 & 1 & 1 & a_2 + ib_2 \\ -1 & 1 & 1 & a_3 + b_3 \end{array}\right)$$

de aquí,

$$\alpha_1 = a_2 - a_3 + i\,(b_2 - b_3)\,, \quad \alpha_2 = 2a_2 - a_1 - a_3 - i\,(b_1 - 2b_2 + b_3)\,, \quad \alpha_3 = a_1 - a_2 + a_3 + i\,(b_1 - b_2 + b_3)\,,$$

por lo tanto, cualquier vector de $\mathbb{C}^3$ se puede escribir como combinación lineal de los vectores $(1, 0, -1)$, $(0, 1, 1)$ y $(1, 1, 1)$. ★

Ejemplo 120 *: Escriba el vector* $\boldsymbol{w} = (3, 1, 0)$ *como combinación lineal de los vectores*

$$\boldsymbol{v_1} = (2, -2, 1)\,, \qquad \boldsymbol{v_2} = (2, 1, -1) \quad y \quad \boldsymbol{v_3} = (1, 2, 2)\,.$$

Solución : Tenemos

$$(3, 1, 0) = \alpha_1\,(2, -2, 1) + \alpha_2\,(2, 1, -1) + \alpha_3\,(1, 2, 2)$$

así,

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 3 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 1 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right),$$

de aquí,

$$\alpha_1 = \frac{1}{3}, \qquad \alpha_2 = 1, \qquad \alpha_3 = \frac{1}{3}.$$

Por lo tanto,

$$(3,1,0) = \frac{1}{3}(2,-2,1) + (2,1,-1) + \frac{1}{3}(1,2,2).$$

★

Ejemplo 121 *: Demuestre que todo vector del espacio vectorial* $\mathbb{R}^3$ *se puede escribir como combinación lineal de los vectores canónicos de* $\mathbb{R}^3$*.*

Demostración : Sea $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, un vector genérico, entonces

$$(x,y,z) = \alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(0,0,1) \qquad \Longrightarrow \qquad (x,y,z) = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),$$

de aquí,

$$\alpha_1 = x, \qquad \alpha_2 = y \qquad \alpha_3 = z,$$

por lo tanto,

$$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}.$$

★

Ejemplo 122 *: Demostrar que si* $\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \ldots, \boldsymbol{w_k}$ *son vectores en un espacio vectorial* V*, entonces*

$$\operatorname{gen}[\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \ldots, \boldsymbol{w_k}]$$

es un subespacio de V*.*

Demostración : Se debe demostrar que $\operatorname{gen}[\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \ldots, \boldsymbol{w_k}]$ es cerrado bajo la suma y la multiplicación por un escalar dado en V.

Sean $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in \operatorname{gen}[\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \ldots, \boldsymbol{w_k}]$, entonces

$$\boldsymbol{u} = \alpha_1\boldsymbol{w_1} + \alpha_2\boldsymbol{w_2} + \cdots + \alpha_k\boldsymbol{w_k}$$

y

$$\boldsymbol{v} = \beta_1\boldsymbol{w_1} + \beta_2\boldsymbol{w_2} + \cdots + \beta_k\boldsymbol{w_k}.$$

Así,

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (\alpha_1+\beta_1)\boldsymbol{w_1} + (\alpha_2+\beta_2)\boldsymbol{w_2} + \cdots + (\alpha_k+\beta_k)\boldsymbol{w_k} = \gamma_1\boldsymbol{w_1} + \gamma_2\boldsymbol{w_2} + \cdots + \gamma_k\boldsymbol{w_k},$$

con lo que, se tiene

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in \operatorname{gen}[\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \ldots, \boldsymbol{w_k}],$$

por lo tanto, $\operatorname{gen}[\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \ldots, \boldsymbol{w_k}]$ es cerrado bajo la suma.

Por otra parte, sea k un escalar, entonces

$$k\boldsymbol{u} = k(\alpha_1\boldsymbol{w_1} + \alpha_2\boldsymbol{w_2} + \cdots + \alpha_k\boldsymbol{w_k}) = c_1\boldsymbol{w_1} + c_2\boldsymbol{w_2} + \cdots + c_k\boldsymbol{w_k},$$

donde, $c_i = k\alpha_i$, con $i = 1,2,3\ldots,k$, con lo que

$$k\boldsymbol{u} \in \operatorname{gen}[\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \ldots, \boldsymbol{w_k}],$$

por lo tanto, $\operatorname{gen}[\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \ldots, \boldsymbol{w_k}]$ es cerrado bajo la multiplicación por un escalar.

Luego, concluimos que $\operatorname{gen}[\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \ldots, \boldsymbol{w_k}]$ es un subespacio de V. ★

Ejemplo 123 *: Demuestre que el conjunto formado por los vectores canónicos,* $\beta = \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ *generan al espacio vectorial* $\mathbb{R}^3$.

Demostración : Sea $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, un vector genérico, entonces

$$(x, y, z) = \alpha_1 (1, 0, 0) + \alpha_2 (0, 1, 0) + \alpha_3 (0, 0, 1) \qquad \Longrightarrow \qquad (x, y, z) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3),$$

de aquí,

$$\alpha_1 = x, \qquad \alpha_2 = y \qquad \alpha_3 = z,$$

por lo tanto,

$$(x, y, z) = x (1, 0, 0) + y (0, 1, 0) + z (0, 0, 1) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}.$$

★

Ejemplo 124 *: Determine si el conjunto dado* B *genera al espacio vectorial dado*

1. *En* $\mathbb{R}^2$, $B = \{(1, 2), (3, 4)\}$
2. *En* $\mathbb{R}^2$, $B = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2)\}$
3. *En* $\mathbb{R}^3$, $B = \{(2, 0, 1), (3, 1, 2), (1, 1, 1), (7, 3, 5)\}$
4. *En* $M_{2\times 3}$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Solución : 1. Para verificar si el conjunto B genera al espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ debemos verificar que todo vector de $\mathbb{R}^2$ se puede escribir como combinación lineal de los vectores de B. Sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ un vector genérico, entonces

$$(x, y) = \alpha_1 (1, 2) + \alpha_2 (3, 4) \qquad \Longrightarrow \qquad (x, y) = (\alpha_1 + 3\alpha_2, 2\alpha_1 + 4\alpha_2),$$

resolvemos el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + 3\alpha_2 = x \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_2 = y \end{array} \right. \qquad \Longrightarrow \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x \\ 2 & 4 & y \end{array} \right) \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_1 = \frac{3}{2}\, y - 2x, \qquad \alpha_2 = x - \frac{1}{2}\, y.$$

Así, $(x, y) = \left(\frac{3}{2}\, y - 2x \right) (1, 2) + \left(x - \frac{1}{2}\, y \right) (3, 4)$. Por lo tanto, el conjunto B genera a $\mathbb{R}^2$.

2. Sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ un vector genérico, entonces

$$(x, y) = \alpha_1 (1, 1) + \alpha_2 (2, 1) + \alpha_3 (2, 2) \qquad \Longrightarrow \qquad (x, y) = (\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3),$$

resolvemos el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = x \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = y \end{array} \right. \qquad \Longrightarrow \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & x \\ 1 & 1 & 2 & y \end{array} \right) \qquad \leftarrow \qquad \begin{array}{c} \text{Infinitas} \\ \text{soluciones} \end{array}$$

Por lo tanto, los vectores de B no generan a $\mathbb{R}^2$.

3. Sea $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ un vector genérico, entonces

$$(x, y, z) = \alpha_1 (2, 0, 1) + \alpha_2 (3, 1, 2) + \alpha_3 (1, 1, 1) + \alpha_4 (7, 3, 5),$$

de aquí,

$$(x, y, z) = (2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 + 7\alpha_4, \alpha_2 + \alpha_3 + 3\alpha_4, \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + 5\alpha_4),$$

resolvemos el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 + 7\alpha_4 = x \\ \alpha_2 + \alpha_3 + 3\alpha_4 = y \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + 5\alpha_4 = z \end{array} \right. \qquad \Longrightarrow \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & 7 & x \\ 0 & 1 & 1 & 3 & y \\ 1 & 2 & 1 & 5 & z \end{array} \right) \qquad \leftarrow \qquad \begin{array}{c} \text{Infinitas} \\ \text{soluciones} \end{array}$$

Por lo tanto, los vectores de B no generan a $\mathbb{R}^3$.

4. Sea $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}$ un vector genérico, entonces

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

de aquí,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha_1 + 3\alpha_3 & \alpha_1 - \alpha_3 \\ 2\alpha_2 + 3\alpha_4 & \alpha_2 + \alpha_4 \end{pmatrix}$$

resolvemos el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\alpha_1 + 3\alpha_3 = a \\ \alpha_1 - \alpha_3 = b \\ 2\alpha_2 + 3\alpha_4 = c \\ \alpha_2 + \alpha_4 = d \end{array} \right. \qquad \Longrightarrow \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 3 & 0 & a \\ 1 & 0 & -1 & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 & 3 & c \\ 0 & 1 & 0 & 1 & d \end{array} \right),$$

de aquí,

$$\alpha_1 = \frac{1}{5}\,a + \frac{3}{5}\,b, \qquad \alpha_2 = 3d - c, \qquad \alpha_3 = \frac{1}{5}\,a - \frac{2}{5}\,b, \qquad \alpha_4 = c - 2d.$$

Por lo tanto, los vectores de B generan a $M_{2\times 2}$. ★

Ejemplo 125 *: Sean* $p(x) = 2 - x + 4x^2$ *y* $q(x) = 4 + x + 6x^2$ *en* P_2*. Hallar* $\operatorname{gen}[p,q]$.

Solución : Sea $r \in P_2$, dado por $r(x) = ax^2 + bx + c$, un vector genérico. Escribimos r como combinación lineal de los vectores p y q.

$$r(x) = \alpha_1 p(x) + \alpha_2 q(x) \qquad \Longrightarrow \qquad ax^2 + bx + c = \alpha_1\left(2 - x + 4x^2\right) + \alpha_2\left(4 + x + 6x^2\right),$$

de aquí,

$$ax^2 + bx + c = (4\alpha_1 + 6\alpha_2)\,x^2 + (-\alpha_1 + \alpha_2)\,x + (2\alpha_1 + 4\alpha_2),$$

resolvemos el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} 4\alpha_1 + 6\alpha_2 = a \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = b \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_2 = c \end{array} \right. \qquad \Longrightarrow \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & a \\ -1 & 1 & b \\ 2 & 4 & c \end{array} \right) \qquad \leftarrow \qquad \frac{3}{2}\,a + b - \frac{5}{2}\,c = 0.$$

Entonces, $\operatorname{gen}[p,q] = \left\{ r(x) = ax^2 + bx + c \ \text{ en } \ P_2 \ / \ \frac{3}{2}\,a + b - \frac{5}{2}\,c = 0 \right\}$. ★

Ejemplo 126 *: Demuestre que si los vectores* $\boldsymbol{u}$ *y* $\boldsymbol{v}$ *generan* V*, entonces* $\alpha\boldsymbol{u}$ *y* $\beta\boldsymbol{v}$ *también generan* V*, para todo* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*,* $\alpha \neq 0$*,* $\beta \neq 0$*.*

Demostración : Sea $\boldsymbol{w} \in V$, puesto que, los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ generan V, existen escalares α_1 y α_2, tales que,

$$\boldsymbol{w} = \alpha_1\boldsymbol{u} + \alpha_2\boldsymbol{v}.$$

Para demostrar que $\alpha\boldsymbol{u}$ y $\beta\boldsymbol{v}$ generan a V, debemos poder escribir cualquier vector de V como combinación lineal de estos vectores. Si $\boldsymbol{w} \in V$, se tiene

$$\boldsymbol{w} = \alpha_1\boldsymbol{u} + \alpha_2\boldsymbol{v},$$

entonces, existen escalares k_1 y k_2, tales que, $\alpha_1 = k_1\alpha$ y $\alpha_2 = k_2\beta$, luego

$$\boldsymbol{w} = k_1\alpha\boldsymbol{u} + k_2\beta\boldsymbol{v} = k_1(\alpha\boldsymbol{u}) + k_2(\beta\boldsymbol{v}),$$

por lo tanto, $V = \text{gen}[\alpha\boldsymbol{u}, \beta\boldsymbol{v}]$. ★

Ejemplo 127 *: Sean*

$$H = \left\{ A \in M_{2\times 2} \ / \ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad y \qquad B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -7 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

1. *Demostrar que H es un subespacio de $M_{2\times 2}$.*
2. *Hallar* $\text{gen}[B]$.
3. *Encontrar, si es posible, una combinación lineal de los vectores de B, tal que dicha combinación lineal sea igual a cero.*

Solución : 1. Se debe demostrar que H es diferente de vacío, es cerrado bajo la suma y cerrado bajo la multiplicación por un escalar dado en $M_{2\times 2}$. Observemos que el vector

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in H,$$

ya que, el elemento a_{44} es igual a cero.

Demostremos que H es cerrado bajo la suma ordinaria definida en $M_{2\times 2}$. Sean $A, B \in H$, vectores genérico,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & 0 \end{pmatrix},$$

entonces

$$A + B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & 0 \end{pmatrix} \in H.$$

Por lo tanto, H es cerrado bajo la suma.

Demostremos que H es cerrado bajo la multiplicación por un escalar ordinaria definida en $M_{2\times 2}$, sea k un escalar, entonces

$$kA = k\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 & kb_1 \\ kc_1 & 0 \end{pmatrix} \in H.$$

Por lo tanto, H es cerrado bajo la multiplicación por un escalar, luego, H es un subespacio del espacio vectorial $M_{2\times 2}$.

2. Escribimos la combinación lineal para un vector en $M_{2\times 2}$, entonces

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -7 & 0 \end{pmatrix},$$

de aquí,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_3 & 2\alpha_2 - 4\alpha_3 \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 - 7\alpha_3 & 0 \end{pmatrix}$$

resolvemos el sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = a \\ 2\alpha_2 - 4\alpha_3 = b \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 - 7\alpha_3 = c \\ 0 = d \end{cases} \Longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 2 & -4 & b \\ -1 & 2 & -7 & c \\ 0 & 0 & 0 & d \end{array}\right) \Longrightarrow \quad d = 0, \quad a - \frac{3}{2}\,b + c = 0.$$

Por lo tanto,

$$\operatorname{gen}[B] = \left\{ A \in M_{2\times 2} \;/\; A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\,b - c & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

3. Tenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -7 & 0 \end{pmatrix},$$

de aquí,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_3 & 2\alpha_2 - 4\alpha_3 \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 - 7\alpha_3 & 0 \end{pmatrix}$$

resolvemos el sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_2 - 4\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 - 7\alpha_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longleftarrow \begin{array}{c}\text{Infinitas} \\ \text{soluciones}\end{array}$$

No es posible escribir los vectores de B como una combinación lineal igualada a cero. ★

Ejemplo 128 *: Dado* $H = \left\{2x^2 + x + 2,\ x^2 - 2x,\ 5x^2 - 5x + 2,\ -x^2 - 3x - 2\right\}$, *considere* $T = \operatorname{gen}[H]$. *Determine si el polinomio* $p(x) = x^2 + x + 2$ *pertenece a* T *subespacio de* P_2.

Solución : Sean c_1, c_2, c_3, c_4 escalares, tales que,

$$c_1\left(2x^2 + x + 2\right) + c_2\left(x^2 - 2x\right) + c_3\left(5x^2 - 5x + 2\right) + c_4\left(-x^2 - 3x - 2\right) = x^2 + x + 2,$$

por lo tanto,

$$2c_1x^2 + c_1x + 2c_1 + c_2x^2 - 2c_2x + 5c_3x^2 - 5c_3x + 2c_3 - c_4x^2 - 3c_4x - 2c_4 = x^2 + x + 2,$$

es decir,

$$(2c_1 + c_2 + 5c_3 - c_4)\,x^2 + (c_1 - 2c_2 - 5c_3 - 3c_4)\,x + (2c_1 + 2c_3 - 2c_4) = x^2 + x + 2,$$

de aquí,

$$\begin{cases} 2c_1 + c_2 + 5c_3 - c_4 = 1 \\ c_1 - 2c_2 - 5c_3 - 3c_4 = 1 \\ 2c_1 + 2c_3 - 2c_4 = 2 \end{cases} \Longrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|c} 2 & 1 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -5 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

el cual no tiene solución.

Así, concluimos que $p(x) \notin \operatorname{gen}[H]$. ★

Ejemplo 129 *: Sean* $\boldsymbol{v_1} = (x_1, y_1, z_1)$ *y* $\boldsymbol{v_2} = (x_2, y_2, z_2)$ *en* $\mathbb{R}^3$*. Demuestre que si* $\boldsymbol{v_2} = c\boldsymbol{v_1}$*, entonces* $\text{gen}\,[\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}]$ *es una recta que pasa por el origen.*

Demostración : Consideremos un vector $\boldsymbol{w} \in \text{gen}\,[\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}]$, entonces, $\boldsymbol{w} = c_1\boldsymbol{v_1} + c_2\boldsymbol{v_2}$.

Como $\boldsymbol{v_2} = c\boldsymbol{v_1}$, se tiene que,

$$\boldsymbol{w} = c_1\boldsymbol{v_1} + c_2\boldsymbol{v_2} = c_1\boldsymbol{v_1} + c_2c\boldsymbol{v_1} = (c_1 + c_2c)\,\boldsymbol{v_1} = \alpha\boldsymbol{v_1} \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{w} = \alpha\boldsymbol{v_1},$$

donde, $\alpha = c_1 + c_2c$. Si $\boldsymbol{w} = (x, y, z)$, entonces

$$(x, y, z) = \alpha\,(x_1, y_1, z_1) \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x = tx_1 \\ y = ty_1 \\ z = tz_1 \end{cases} \quad \longleftarrow \quad \begin{array}{c}\text{Ecuaciones paramétrica}\\ \text{de la recta que pasa}\\ \text{por el origen}\end{array}$$

★

Ejemplo 130 *: Sea el espacio vectorial* $V = \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x > 0\}$ *con las operaciones:*

- *Suma : Si* $a, b \in V$*, entonces* $a + b = ab$*, donde* ab *es la multiplicación usual entre números reales.*
- *Multiplicación por un escalar : Si* $a \in V$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$*, entonces* $\alpha a = a^\alpha$*.*

Estudie la dependencia o independencia lineal de los vectores v_1*,* v_2 *de* V*.*

Solución : Sean $v_1 = x$ y $v_2 = y$ vectores de V, entonces

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0,$$

es decir,

$$\alpha_1 x + \alpha_2 y = 1 \quad \Longrightarrow \quad x^{\alpha_1} + y^{\alpha_2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad e^{\alpha_1 \ln x} e^{\alpha_2 \ln y} = 1$$

$$\Longrightarrow \quad e^{\alpha_1 \ln x + \alpha_2 \ln y} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \ln\left(e^{\alpha_1 \ln x + \alpha_2 \ln y}\right) = \ln 1$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_1 \ln x + \alpha_2 \ln y = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = -\frac{\ln y}{\ln x}\,\alpha_2$$

Observemos que, no necesariamente, α_1 y α_2 son iguales a cero, por lo que concluimos que los vectores son linealmente dependientes. ★

Ejercicios

1. Sea $\boldsymbol{v} = (a, b)$ un vector cualquiera del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Escriba $\boldsymbol{v}$ como una combinación lineal de los vectores canónicos, $\boldsymbol{i}$, y $\boldsymbol{j}$, de $\mathbb{R}^2$.

2. Sea $\boldsymbol{v} = (a, b, c)$ un vector cualquiera del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$. Escriba $\boldsymbol{v}$ como una combinación lineal de los vectores canónicos, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{k}$, de $\mathbb{R}^3$.

3. Sea $\boldsymbol{v} = ax^2 + bx + c$ un vector cualquiera del espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 2, P_2. Escriba $\boldsymbol{v}$ como una combinación lineal de los vectores

$$\boldsymbol{v_1} = x^2, \qquad \boldsymbol{v_2} = x, \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{v_3} = 1.$$

4. Sea $\boldsymbol{v} = ax^2 + bx + c$ un vector cualquiera del espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 2, P_2. Escriba $\boldsymbol{v}$ como una combinación lineal de los vectores

$$\boldsymbol{v_1} = x^2 - 2x, \qquad \boldsymbol{v_2} = 1 - x, \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{v_3} = x^2 - x + 1.$$

5. Sea $\boldsymbol{v} = (a, b, c)$ un vector cualquiera del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$. Escriba $\boldsymbol{v}$ como una combinación lineal de los vectores
$$\boldsymbol{v_1} = (1, 1, 1)\,, \qquad \boldsymbol{v_2} = (1, 0, 1)\,, \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{v_3} = (0, 1, 1)\,.$$

6. Sea $\boldsymbol{v} = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un vector cualquiera del espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 3, P_3. Escriba $\boldsymbol{v}$ como una combinación lineal de los vectores
$$\boldsymbol{v_1} = x^3, \qquad \boldsymbol{v_2} = x^2 - x, \qquad \boldsymbol{v_2} = 2 - x^3 \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{v_4} = 2x.$$

7. Considere los vectores $\boldsymbol{a} = (1, 2)$, $\boldsymbol{b} = (3, 5)$ y $\boldsymbol{c} = (1, 0)$. Exprese al vector $\boldsymbol{c}$ como una combinación lineal de los otros vectores.

8. Sea $\boldsymbol{v} = (2, -1, 3)$ un vector cualquiera del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$. Escriba $\boldsymbol{v}$ como una combinación lineal de los vectores
$$\boldsymbol{v_1} = (1, 1, 1)\,, \qquad \boldsymbol{v_2} = (1, 0, 1)\,, \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{v_3} = (0, 1, 1)\,.$$

9. Sea $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un vector cualquiera del espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2, $M_{2\times 2}$. Escriba $\boldsymbol{v}$, como combinación lineal de los vectores
$$\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{v_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

10. Sea $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ un vector cualquiera del espacio vectorial de las matrices de tamaño 2×3, $M_{2\times 3}$. Escriba $\boldsymbol{v}$, como combinación lineal de los vectores
$$\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{v_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{v_4} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{v_5} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{v_6} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

11. Sea $\boldsymbol{v} = (4, 1, -3)$ un vector cualquiera del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$. Escriba $\boldsymbol{v}$ como una combinación lineal de los vectores
$$\boldsymbol{v_1} = (1, 1, 1)\,, \qquad \boldsymbol{v_2} = (1, 0, 1)\,, \qquad \boldsymbol{v_3} = (-1, 0, 3)\,, \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{v_4} = (0, 1, 1)\,.$$

12. Si $\mathbb{C}$ es el espacio vectorial de los números complejos. ¿Qué vectores de $\mathbb{C}^3$ son combinaciones lineales de $(1, 0, -1)$, $(0, 1, 1)$ y $(1, 1, 1)$?.

13. Escriba el vector $\boldsymbol{w} = (3, 1, 0)$ como combinación lineal de los vectores
$$\boldsymbol{v_1} = (2, -2, 1)\,, \qquad \boldsymbol{v_2} = (2, 1, -1) \quad \text{y} \quad \boldsymbol{v_3} = (1, 2, 2)\,.$$

14. Demuestre que los vectores canónicos del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, es un conjunto generador de dicho espacio.

15. Demuestre que los vectores canónicos del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, es un conjunto generador de dicho espacio.

16. Considere los vectores en el espacio vectorial $M_{2\times 2}$
$$\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{v_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demuestre que el conjunto de vectores $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, \boldsymbol{v_4}\}$, es un conjunto generador de dicho espacio

17. Considere los vectores en el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 2, P_2

$$\boldsymbol{v_1} = x^2, \qquad \boldsymbol{v_2} = x, \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{v_3} = 1.$$

Demuestre que el conjunto de vectores $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\}$, es un conjunto generador de dicho espacio

18. Considere los ejercicios desde 4 hasta 11. Diga cuales de los conjuntos de vectores dados en cada ejercicio es un conjunto generador del espacio vectorial dado.

19. Demostrar que si $\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \ldots, \boldsymbol{w_k}$ son vectores en un espacio vectorial V, entonces

$$\text{gen}\left[\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \ldots, \boldsymbol{w_k}\right]$$

es un subespacio de V.

20. Demuestre que el conjunto formado por los vectores canónicos, $\beta = \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ generan al espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

21. Demuestre que $\text{gen}\left[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\right] = \mathbb{R}^2$, donde los vectores $\boldsymbol{i}$, y $\boldsymbol{j}$ son los vectores canónicos de $\mathbb{R}^2$.

22. Demuestre que $\text{gen}\left[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\right] = \mathbb{R}^3$, donde los vectores $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{k}$ son los vectores canónicos de $\mathbb{R}^3$.

23. Demuestre que $\text{gen}\left[\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\right] = P_2$, donde $\boldsymbol{v_1} = x^2$, $\boldsymbol{v_2} = x$ y $\boldsymbol{v_3} = 1$, que se denominan vectores canónicos de P_2.

24. Demuestre que $\text{gen}\left[\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, \boldsymbol{v_4}\right] = P_3$, donde $\boldsymbol{v_1} = x^3$, $\boldsymbol{v_2} = x^2$, $\boldsymbol{v_3} = x$ y $\boldsymbol{v_4} = 1$, que se denominan vectores canónicos de P_3.

25. Demuestre que $\text{gen}\left[\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, \boldsymbol{v_4}\right] = M_{2\times 2}$, donde

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{v_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que se denominan vectores canónicos de $M_{2\times 2}$.

26. Determine si el conjunto dado B genera al espacio vectorial dado

    1. En $\mathbb{R}^2$, $B = \{(1,2), (3,4)\}$
    2. En $\mathbb{R}^2$, $B = \{(1,1), (2,1), (2,2)\}$
    3. En $\mathbb{R}^3$, $B = \{(2,0,1), (3,1,2), (1,1,1), (7,3,5)\}$
    4. En $M_{2\times 3}$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

27. Demuestre que si los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ generan V, entonces $\alpha\boldsymbol{u}$ y $\beta\boldsymbol{v}$ también generan V, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$.

28. Sean $p(x) = 2 - x + 4x^2$ y $q(x) = 4 + x + 6x^2$ en P_2. Hallar $\text{gen}\left[p.q\right]$.

29. Dado $H = \left\{2x^2 + x + 2,\ x^2 - 2x,\ 5x^2 - 5x + 2,\ -x^2 - 3x - 2\right\}$, considere $T = \text{gen}\left[H\right]$. Determine si el polinomio $p(x) = x^2 + x + 2$ pertenece a T subespacio de P_2.

30. Sean $\boldsymbol{v_1} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\boldsymbol{v_2} = (x_2, y_2, z_2)$ en $\mathbb{R}^3$. Demuestre que si $\boldsymbol{v_2} = c\boldsymbol{v_1}$, entonces $\text{gen}\left[\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}\right]$ es una recta que pasa por el origen.

31. ¿Son los vectores

$$\boldsymbol{u_1} = (1,1,2,4) \qquad \boldsymbol{u_2} = (2,-1,-5,2) \qquad \boldsymbol{u_3} = (1,-1,-4,0) \qquad \boldsymbol{u_4} = (2,1,1,6)$$

linealmente independientes en $\mathbb{R}^4$.

32. Hallar tres vectores de $\mathbb{R}^3$ que sean linealmente dependientes y tales que dos cualesquiera de ellos son linealmente independientes.

33. Determine una condición sobre los números a, b, c y d, tal que los vectores (a, b) y (c, d) sean linealmente dependientes.

34. ¿Para qué valor(es) de α serán linealmente dependientes los vectores

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ \alpha \\ 4 \end{pmatrix} ?.$$

35. ¿Para qué valores reales de c son linealmente independientes los vectores $(1-c, 1+c)$ y $(1+c, 1-c)$?

36. Suponga que $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ son linealmente independientes. Pruebe o desapruebe

$$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\ ; \qquad \boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}\ ; \qquad \boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$$

son linealmente independientes.

37. Demuestre que los vectores $(1, a, a^2)$, $(1, b, b^2)$ y $(1, c, c^2)$ son linealmente independientes si $a \neq b$, $a \neq c$ y $b \neq c$.

38. Encuentre un conjunto de tres vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$ que contenga a los vectores $(2, 1, 2)$ y $(-1, 3, 4)$.

39. ¿Para qué valor(es) de α serán linealmente dependientes los vectores

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} ?.$$

40. Determine si el conjunto de vectores dado es linealmente dependiente o independiente

1. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$
2. $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$
3. $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$
4. $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$
5. $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$
6. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$
7. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
8. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
9. $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$
10. $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$
11. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$
12. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

13. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

14. $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

15. $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -5 \end{pmatrix} \right\}$

16. $\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & -5 \end{pmatrix} \right\}$

17. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

18. $\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \right\}$

19. $\left\{1 - 2x + x^2,\ 3 - 5x + 4x^2,\ 2x - 3x^2\right\}$

20. $\left\{2x^2 - x^3,\ x + 3x^2,\ x - 2,\ 3\right\}$

21. $\left\{3x^3 - 2x^2 + 1,\ 3x - x^2,\ 5 - x,\ 2x\right\}$

22. $\left\{-x^2 - 3,\ x + 3,\ 2x - 2 - x^2,\ 1\right\}$

41. Sea $S = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\}$ un conjunto linealmente independiente de vectores de un espacio vectorial V. Demuestre que el conjunto $T = \{\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \boldsymbol{w_3}\}$, donde

$$\boldsymbol{w_1} = \boldsymbol{v_1}, \qquad \boldsymbol{w_2} = \boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2}, \qquad \boldsymbol{w_3} = \boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2} + \boldsymbol{v_3},$$

también es un conjunto linealmente independiente en V.

42. Sean $H = \left\{ A \in M_{2\times 2} \ / \ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \right\}$ y $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -7 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

(a) Demostrar que H es un subespacio de $M_{2\times 2}$.

(b) ¿Es B un conjunto generador de H?

(c) Hallar $\text{gen}[B]$.

(d) Determinar si B es linealmente independiente.

43. Sea $H = \left\{2 + x,\ 1 - x + 2x^2,\ 3x - 4x^2\right\}$ en P_2.

(a) Hallar $\text{gen}[H]$. (b) ¿H es un conjunto linealmente independiente?

44. Sea el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x > 0\}$ con las operaciones:

- Suma : Si $a, b \in V$, entonces $a + b = ab$, donde ab es la multiplicación usual entre números reales.
- Multiplicación por un escalar : Si $a \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha a = a^\alpha$.

Estudie la dependencia o independencia lineal de los vectores v_1, v_2 de V.

45. En P_2 sea $H = \left\{1 + x^2,\ -1 + x,\ 2 - x + x^2,\ -2 + 4x + 2x^2\right\}$.
   (a) ¿H es linealmente independiente?.
   (b) ¿Cuál es el subconjunto de H con más elementos que es linealmente independiente?.
   (c) ¿A dicho conjunto se le puede agregar otro polinomio de P_2, tal que el nuevo conjunto sea linealmente independiente y genere el espacio?.

46. Sean $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ vectores de un espacio vectorial V.
   (a) Demostrar que $\text{gen}\,[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]$ es un subespacio vectorial de V.
   (b) Sea $V = P_3$ $\boldsymbol{u} = p(x) = 1 - x^2$, $\boldsymbol{v} = q(x) = -x + x^2$ y $\boldsymbol{w} = r(x) = x + x^2$.
      i. Hallar $\text{gen}\,[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]$.
      ii. ¿$\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ es linealmente independiente?

47. ¿Una matriz de tamaño 4×5 puede tener todas sus columnas linealmente independientes?. ¿Y todas sus filas? Justificar la respuesta.

48. Si A es una matriz de tamaño 3×5 y $\rho(A) = 2$, ¿puede A tener todas sus columnas linealmente independientes? ¿Y todas sus filas? Justificar la respuesta.

49. Una matriz que no sea cuadrada ¿puede tener todas sus filas y todas sus columnas linealmente independientes? Justificar la respuesta.

50. Determinar si las siguientes proposiciones son **VERDADERAS** o **FALSAS**.
   (a) El conjunto $\{(1,2,1),\ (1,0,1),\ (2,2,2),\ (4,4,4)\}$ genera a un plano de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Sean $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ de $\mathbb{R}^3$, tales que $\text{gen}\,[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}] = \mathbb{R}^3$, Entonces $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ son linealmente independientes.
   (c) El conjunto de soluciones de un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas no homogéneo es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.
   (d) Sean $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$, tales que ninguno es múltiplo escalar de otro. Entonces son linealmente dependientes.
   (e) Sean $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$ linealmente dependientes. Entonces alguno de ellos es múltiplo escalar de otro.
   (f) $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ es el único conjunto generador de $\mathbb{R}^3$.
   (g) Si $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$ es linealmente independiente, entonces $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\}$ es linealmente dependiente.
   (h) Si $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ generan a V y $\boldsymbol{w} \in V$, entonces $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ generan a V.
   (i) Si $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ es un conjunto linealmente independiente en V y si $c_1, c_2, c_3 \ldots, c_n$ son escalares no nulos, entonces $\{c_1\boldsymbol{v_1}, c_2\boldsymbol{v_2}, c_3\boldsymbol{v_3}, \ldots, c_n\boldsymbol{v_n}\}$ es linealmente independiente.

Bibliografía

1. **Grossman, Staley I.**: "*Álgebra lineal*". Quinta edición. Mc Graw Hill.
2. **Kolman, B. y Hill, D. R.**: "*Álgebra lineal*". Octava edición. PEARSON Prentice Hall.
3. **Rangel, J., y otros**: "*Problemario de álgebra lineal*". Universidad Metropolitana. 1997.
4. **Anton, H. - Rorres, C.**: "*Elementary linear algebra. Applications version*". Six Edition. WILEY.

Este material ha sido revisado recientemente, pero esto no garantiza que esté libre de errores, por esa razón se agradece reportar cualquier error que usted encuentre en este material enviando un mensaje al correo electrónico

farith.math@gmail.com

indicando donde se encuentra(n) dicho(s) error(es). **MUCHAS GRACIAS**.